Αναλυτικό Υπόμνημα Δημοσιεύσεων του Νικόλαου Καραμπετάκη

Διδακτορική Διατριβή

Ν.Π. Καραμπετάκης, 1993, *Έννοιες Ισοδυναμίας για Γραμμικά, Χρονικά Αμετάβλητα, Πολυμεταβλητά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*, Επιστημονική Επετηρίδα του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Παράρτημα Αριθμός 15, Θεσσαλονίκη 1993.

Παρακάτω δίνεται μια σύντομη περιγραφή των κεφαλαίων που αναπτύχθηκαν στην παραπάνω διδακτορική διατριβή.

Στο **κεφάλαιο 1** δίνεται μια σύντομη εισαγωγή με σκοπό να εξηγήσει τον τίτλο της διατριβής δηλαδή α) να περιγράψει το είδος των συστημάτων που θα μελετηθούν στην διατριβή και που έχουν εφαρμογές τα συστήματα αυτά, β) να περιγράψει την όλη δουλειά που έχει γίνει από το 1970 ως τώρα με αντικείμενο την ισοδυναμία συστημάτων και τέλος γ) να δώσει μια σύντομη περιγραφή των κεφαλαίων της διατριβής.

Στο **κεφάλαιο 2** δίνεται μια απλή παρουσίαση βασικών μαθηματικών εννοιών πρδ. η αλγεβρική δομή ρητών πινάκων πρδ. μηδενικά (zeros) στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ και ελάχιστοι δείκτες στηλών και γραμμών (minimal column and row indices), καθώς και μαθηματικών εργαλείων τα οποία είναι σημαντικά για την κατανόηση της διατριβής.

Στο **κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται η εξέλιξη των μετασχηματισμών πολυωνυμικών πινάκων που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο $\mathbb{C}$ ή πιο γενικά στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται μια γενίκευση όλων αυτών των γνωστών μετασχηματισμών για την περίπτωση που αντί πολυωνυμικών πινάκων έχουμε ρητούς πίνακες όχι κατ' ανάγκη των ίδιων διαστάσεων.

Στο **κεφάλαιο 4** ορίζεται η Ω-ισοδυναμία ρητών πινάκων όχι κατ' ανάγκη ιδίων διαστάσεων που έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή ρητών πινάκων σε μια περιοχή $\Omega\subseteq\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Εφαρμογές της ισοδυναμίας αυτής είναι α) η μελέτη της μηδενικής δομής στην περιοχή $\Omega\subseteq\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ συναρτήσεων μεταφοράς έπειτα από Ω-πολυωνυμική ανάδραση εξόδου και β) η επέκταση των γνωστών συνθηκών απουσίας μηδενικών στο $s=\{\infty\}$ πολυωνυμικών πινάκων (Pugh et al 1992, Zhang 1989) για την περίπτωση των ρητών πινάκων.

Στο **κεφάλαιο 5** ορίζεται η έννοια της ελάχιστης πραγμάτωσης (minimal realization) ρητών πινάκων. Προτείνονται τρόποι αναγωγής ρητών πινάκων σε $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ - ισοδύναμους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες (matrix pencils) και δίνεται τέλος μια γενίκευση της μορφής Kronecker (Kronecker 1890, Gantmacher 1959) για ρητούς πίνακες.

Στο **κεφάλαιο 6** παρουσιάζεται ο χώρος λύσεων μιας ομογενούς διαφορικής εξισώσεως της μορφής $A(\rho)\beta(t)=0$, όπου $\rho:=d/dt$ είναι ο διαφορικός τελεστής, $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και $rank_{R(s)}A(s)=r\leq\min(p,m)$, σε σχέση με την αλγεβρική δομή του πίνακα $A(s)$, δίνοντας έτσι μια απάντηση στο άλυτο ερώτημα του Willems (1991) όσον αφορά την συμπεριφορά (behaviour) συστημάτων αναδρομικής μορφής (AutoRegressive Representations). Η λύση του προβλήματος αυτού έχει ως σκοπό επίσης να γενικεύσει την δουλειά των Verghese & Kailath (1979), Cohberg (1982) και Vardulakis & Fragulis (1989).

Στο **κεφάλαιο 7** δίνεται μια ερμηνεία του μετασχηματισμού της πλήρους ισοδυναμίας στο σύνολο των τετράγωνων και αντιστρέψιμων πολυωνυμικών πινάκων υπό την μορφή ισομορφισμών, μεταξύ του χώρου λύσεων, των ομογενών συστημάτων που σχηματίζονται από τους ισοδύναμους πολυωνυμικούς πίνακες. Επιπλέον δίνεται απάντηση στο πότε μια σχέση της μορφής $y(t)=N(\rho)\beta(t)$ ($\rho := d/dt$ (διαφορικός τελεστής), $N(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$), όπου $\beta(t):[0-,+\infty)\to\mathbb{R}^m$ είναι τέτοιο ώστε $A(\rho)\beta(t)=0$ ($A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$), μπορεί να θεωρηθεί απεικόνιση και πιο γενικά ισομορφισμός. Η γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich (1974) για ομογενή συστήματα είναι ένα από τα επιπλέον θέματα του κεφαλαίου αυτού.

Στο **κεφάλαιο 8** γίνεται μια σύντομη αναφορά στις πολυωνυμικές περιγραφές γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων και στις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα συστήματα αυτά. Με την βοήθεια των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 6 δίνουμε μια γεωμετρική ερμηνεία των αναλλοίωτων μηδενικών (invariant zeros) στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ενός συστήματος γενικεύοντας έτσι την δουλειά των Karcanias (1975), MacFarlane & Karcanias (1976). Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται επίσης η "πεπερασμένη" αλλά και "κρουστική" συμπεριφορά μιας ειδικής κατηγορίας γραμμικών συστημάτων τα τετράγωνα αντίστροφα συστήματα (square inverse linear systems), προτείνοντας έτσι μια γενίκευση της δουλειάς των Rosenbrock & Van Der Weiden (1977).

Στο **κεφάλαιο 9** γίνεται μια μικρή αναφορά σε γνωστούς μετασχηματισμούς πολυωνυμικής περιγραφής συστημάτων (Π.Π.Σ.) και στην συνέχεια προτείνονται τρόποι αναγωγής γενικών Π.Π.Σ. σε ισοδύναμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (generalized state space systems). Ορίζεται η πλήρης αντιστρέψιμη ισοδυναμία (full unimodular equivalence) για κλασματικές Π.Π.Σ. (matrix fraction descriptions), ως γενίκευση της γνωστής αντιστρέψιμης ισοδυναμίας (unimodular equivalence) (Kailath 1980, Smith 1981), και στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων (full system equivalence). Η γενίκευση της ισοδυναμίας Morf (Morf 1975, Levy et al 1977) έρχεται να κλείσει το κεφάλαιο αυτό.

Στο **κεφάλαιο 10** ορίζεται η θεμελιώδης ισοδυναμία συστημάτων (fundamental equivalence) η οποία αποτελεί, όπως και αποδεικνύεται, την ερμηνεία της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων στο πεδίο του χρόνου υπό την μορφή αμφιέσεων (ένα πρός ένα και επί γραμμικών απεικονίσεων) μεταξύ του "πεπερασμένου" αλλά και του "κρουστικού" χώρου λύσεων-εισόδων των ισοδύναμων συστημάτων. Η ισοδυναμία αυτή αποτελεί μια γενίκευση της ισοδυναμίας των Pernebo (1977) και Hayton et al (1986). Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich (1974) καθώς και με μια γενίκευση του τρόπου αναγωγής μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια "ισοδύναμη" Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων των Wolovich (1973), Wolovich & Guidorzi (1977).

Στο **κεφάλαιο 11** παρουσιάζεται μια εφαρμογή της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων στην ιεραρχική θεωρία συστημάτων (hierarchical theory of systems), η οποία γενικεύει ορισμένα γνωστά αποτελέσματα των Rosenbrock & Pugh (1974).

Α. Εργασίες δημοσιευμένες σε διεθνή περιοδικά

1) Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, Matrix fractions and full system equivalence., *IMA Journal of Mathematical Control and its Information,* 9, 147-160.

Έστω Σ (S) η κατηγορία των γραμμικά, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων τα οποία περιγράφονται, από το παρακάτω σύστημα, αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων :

$$\Sigma: \quad A_L(\rho)y(t) = B_L(\rho)u(t)$$

$$S: \quad \begin{aligned} A_R(\rho)\beta(t) &= u(t) \\ y(t) &= C_R(\rho)u(t) \end{aligned}$$

όπου $\rho := d/dt$ συμβολίζουμε τον διαφορικό τελεστή, $A_L(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ με $\det[A_L(\rho)] \neq 0$, $B_L(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times m}$ ($A_R(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ με $\det[A_R(\rho)] \neq 0$, $C_R(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{m\times r}$), $u(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος και $y(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^r$ η έξοδος του συστήματος.

Στην εργασία αυτή προτείνετε ένα καινούργιο είδος ισοδυναμίας, η *πλήρης αντιστρέψιμη ισοδυναμία* (*full unimodular equivalence*), μεταξύ συστημάτων της παραπάνω μορφής (matrix fraction descriptions), η οποία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την πεπερασμένη αλλά και κρουστική δομή των συστημάτων αυτών. Η καινούργια αυτή ισοδυναμία α) αποτελεί μια γενίκευση της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας συστημάτων (unimodular equivalence), που προτάθηκε από τους Kailath (1980) και Smith (1981), και β) ταυτίζεται με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων (full system equivalence, Hayton et. al. (1990)) για την συγκεκριμένη κατηγορία συστημάτων.

Citations
1. Galkowski Kryzysztof, 1997, State-space realizations of multi-input multi-output systems-elementary operations approach., *Int. J. Control*, **66**, No.1, 119-144.

2) Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1994, Equivalence transformations of rational matrices and applications., *International Journal of Control*, 59, NO.4, 1001-1020.

Έστω $P(p,m)$ είναι το σύνολο των $(r+p)\times(r+m)$ ρητών πινάκων (πινάκων διαστάσεων $(r+p)\times(r+m)$ με στοιχεία από τον δακτύλιο των ρητών συναρτήσεων). Έστω επίσης $P_1(s), P_2(s) \in P(p,m)$ δύο ρητοί πίνακες. Ένα ανοικτό ερώτημα που απασχολούσε το επιστημονικό κοινό, ήταν η εύρεση ενός μετασχηματισμού της μορφής

$$M(s)P_1(s) = P_2(s)N(s)$$

όπου $M(s), N(s)$ πίνακες κατάλληλων διαστάσεων, ο οποίος να διατηρεί αναλλοίωτη την δομή των πινάκων αυτών σε μια συγκεκριμένη περιοχή $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (δες Pernebo (1981)). Η επίλυση στο συγκεκριμένο πρόβλημα δίνεται με τον προτεινόμενο μετασχηματισμό της Ω-ισοδυναμίας (Ω-equivalence). Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός αποτελεί μια γενίκευση των γνωστών μετασχηματισμών : της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας (extended unimodular equivalence, Pugh & Shelton 1978), της γενικευμένης δικανονικής ισοδυναμίας (extended causal equivalence, Anderson et. al. 1985, Cullen 1987, Walker 1988) και τέλος της πλήρους ισοδυναμίας (full equivalence, Hayton et al. 1988).

Μια από τις εφαρμογές που προκύπτουν από την ισοδυναμία αυτή είναι ότι η δομή της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος, στην περιοχή $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, παραμένει αναλλοίωτη μετά από Ω-πολυωνυμική ανάδραση εξόδου.

Μια γενίκευση των γνωστών συνθηκών, για την απουσία μηδενικών ενός πολυωνυμικού πίνακα, των Zhang (1989) και Pugh et. al. (1992), στην περίπτωση των ρητών πινάκων, επίσης προτείνεται.

Citations

1. Rafael Bru, Carmen Coll, Josep Gelonch, 1996, Periodic coprime matrix fraction decompositions, The Electronic Journal of Linear Algebra, Volume 1, pp.44-58
2. Simon J. McInerney, 1999, Representations and transformations for multi-dimensional systems, Ph.D. Thesis, Department of Mathematical Sciences, Loughborough University of Technology.

3) Pugh A.C., Karampetakis N.P., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1994, A fundamental notion of equivalence for Linear Multivariable Systems., *IEEE Trans. on Auto. Control*, AC-39, NO.5, May 1994.

Έστω Σ η κατηγορία των γραμμικά, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων τα οποία περιγράφονται, από το παρακάτω σύστημα, αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t) \tag{1α}$$

$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t) \tag{1β}$$

όπου $\rho := d/dt$ συμβολίζουμε τον διαφορικό τελεστή, $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ με $\det[A(\rho)] \neq 0$, $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times m}, C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times r}, D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$), $u(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος, $\beta(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^r$ η ψευδοκατάσταση του συστήματος και $y(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^p$ είναι η έξοδος του συστήματος.

Στην παρούσα εργασία ορίζουμε την έννοια της *θεμελιώδους ισοδυναμίας* (fundamental equivalence) συστημάτων. Σύμφωνα με την έννοια αυτή δύο συστήματα Σ_1 και Σ_2 που ανήκουν στην παραπάνω κατηγορία συστημάτων θα θεωρούνται *θεμελιώδη ισοδύναμα* εάν-ν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των πεπερασμένων αλλά και κρουστικών χώρων λύσεων-εισόδων τους. Η έννοια της θεμελιώδους ισοδυναμίας συστημάτων, όπως αποδεικνύεται αποτελεί την γεωμετρική ερμηνεία της *πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων* (full system equivalence), η οποία προτάθηκε από τους Hayton et. al. (1990). Η καινούργια αυτή ισοδυναμία αποτελεί μια γενίκευση της *θεμελιώδους ισοδυναμίας συστημάτων* (fundamental equivalence) που προτάθηκε από τον Pernebo (1977) και αφορούσε μόνο την πεπερασμένη συμπεριφορά των συστημάτων αυτών καθώς και γενίκευση της *θεμελιώδους ισοδυναμίας συστημάτων* (fundamental equivalence) που προτάθηκε από τους Hayton et. al. (1986), για την ειδική κατηγορία των γενικευμένων ιδιόμορφων συστημάτων (generalized state space systems).

Citations

1. Mahmood S., 1996, *Some Structural Problems Arising in the Generalized Theory of Linear Multivariable Control Systems*, Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.
2. Vafiadis D., 1995, *Algebraic and Geometric Methods and Problems for Implicit Linear Systems*, Ph. D. Thesis, City University, U.K.
3. E. Antoniou and A.I. Vardulakis, 2003, Fundamental equivalence of discrete-time AR representations , Int. J. Control, Vol.76, No.11, 1078-1088.
4. Vakhtang Lomadze, 2002, Rosenbrock models and their homotopy equivalence, Linear Algebra and its Applications 351-352: 519-532.
5. Galkowski Kryzysztof, 1997, State-space realizations of multi-input multi-output systems-elementary operations approach., *Int. J. Control*, **66**, No.1, 119-144.

6. Krzysztof Galkowski, 2000, State-space realizations of MIMO 2D discrete linear systems – Elementary operation and variable inversion approach, Int. J. Control, Vol.73, No.3, 242-253.
7. Hou, Pugh A.C. and Hayon G.E., Generalized transfer functions and input-output equivalence, Int. J. Control, Vol.68, No.5, 1163-1178.
8. Krzysztof Galkowski, 2001, Minimal state space realizations for a class of linear, discrete, nD, SISO systems, Int. J. Control, Vol.74, No.13, pp.1279-1294.
9. Gałkowski K., 2001, State-space Realizations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD (n>2) Case, Springer Verlag, LNCIS 2001.
10. Johnson D.S., 1993, *Coprimeness in Multidimensional System Theory and Symbolic Computation*., Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.
11. Pugh A.C., Hou M. and Hayton G.E., Input-output structure and transfer equivalent polynomial representation of behavioural systems, Proc. of the 36th IEEE CDC, San Diego, CA, pp.3178-3183.
12. Simon J. McInerney, 1999, Representations and transformations for multi-dimensional systems, Ph.D. Thesis, Department of Mathematical Sciences, Loughborough University of Technology.
13. Bourles H., 2006, Structural properties of linear systems - Part II: Structure at infinity, Volume: 328, Pages: 259-284.
14. Fuhrmann, P.A., Helmke, U.b 2011, Equivalence conditions for behaviors and the Kronecker canonical form, Mathematics of Control Signal and Systems, Volume 22, Issue 4, August 2011, Pages 267-293

4) Karampetakis N.P., Mertzios B.G. and Vardulakis A.I.G., 1994, Computation of the transfer function matrix and its Laurent expansion of generalized two-dimensional systems., *International Journal of Control,* Vol.60, NO.4, pp.521-541.

Έστω Σ, ένα γραμμικά, μη χρονικά μεταβαλλόμενο, πολυμεταβλητό διακριτό δισδιάστατο σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τις παρακάτω αλγεβρικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών :

$$A(\sigma_1,\sigma_2)x(t_1,t_2)=B(\sigma_1,\sigma_2)u(t_1,t_2)$$

$$y(t_1,t_2)=C(\sigma_1,\sigma_2)x(t_1,t_2)+D(\sigma_1,\sigma_2)u(t_1,t_2)$$

όπου σ_1 είναι ο αριστερά τελεστής διαφορών π.χ. $\sigma_1 x(t_1,t_2)=x(t_1+1,t_2)$, σ_2 ο δεξιά τελεστής διαφορών π.χ. $\sigma_2 x(t_1,t_2)=x(t_1,t_2+1)$, $A(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}[\sigma_1,\sigma_2]^{r\times r}$ με $\det[A(\sigma_1,\sigma_2)]\neq 0$, $B(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}[\sigma_1,\sigma_2]^{r\times m}$, $C(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}[\sigma_1,\sigma_2]^{p\times r}$, $D(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}[\sigma_1,\sigma_2]^{p\times m}$), $u(t_1,t_2):\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος, $x(t_1,t_2):\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^r$ η ψευδοκατάσταση του συστήματος και $y(t_1,t_2):\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^p$ είναι η έξοδος του συστήματος. Η παραπάνω γενική μορφή δισδιάστατων συστημάτων, που προτείνεται στην παραπάνω εργασία, αποτελεί μια γενίκευση των γνωστών μοντέλων των Roesser (1975), Fornasini & Marchesini (1976, 1978), Kurek (1985), Kaczorek (1988) καθώς και αποτελεί μια ειδική περίπτωση των διδιάστατων αναδρομικών περιγραφών (2-D AutoRegressive Representations, δες Blomberg & Ylinen (1983), Komornik et. al. (1989), Rocha (1990)).

Στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας παρουσιάζουμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει τον αντίστροφο του πίνακα $A(\sigma_1,\sigma_2)$ και στην συνέχεια την συνάρτηση μεταφοράς $G(\sigma_1,\sigma_2)$ του συστήματος Σ :

$$G(\sigma_1,\sigma_2)=C(\sigma_1,\sigma_2)A^{-1}(\sigma_1,\sigma_2)B(\sigma_1,\sigma_2)+D(\sigma_1,\sigma_2)$$

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας προτείνουμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει την Laurent ανάπτυξη του πίνακα $A^{-1}(\sigma_1,\sigma_2)$, η οποία όπως αποδεικνύεται είναι μοναδική κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες.

Οι παραπάνω προτεινόμενοι αλγόριθμοι αποτελούν γενικεύσεις των γνωστών επαναληπτικών αλγορίθμων των Mertzios & Paraskevopoulos (1981), Mertzios (1986), Mertzios & Lewis (1988, 1989), Lewis & Mertzios (1992).

Εφαρμογές των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορούμε να έχουμε στην μελέτη των διδιάστατων ψηφιακών φίλτρων τα οποία συναντώνται στην επεξεργασία εικόνας (επεξεργασία γεωφυσικών και σεισμικών δεδομένων, επεξεργασία δορυφορικών φωτογραφιών και εικόνων video), στα ηλεκτρικά δίκτυα με μεταβλητά στοιχεία κ.λ.π.

Citations

1. Π. Τζέκης, 2001, Ανάπτυξη αλγορίθμων Η/Υ για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.
3. Galkowski Kryzysztof, 1997, State-space realizations of multi-input multi-output systems-elementary operations approach., *Int. J. Control*, **66**, No.1, 119-144.
4. Krzysztof Galkowski, 2000, State-space realizations of MIMO 2D discrete linear systems – Elementary operation and variable inversion approach, Int. J. Control, Vol.73, No.3, 242-253.

5) Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, Generalized state-space system matrix equivalents of a Rosenbrock system matrix., *IMA Journal of Mathematical Control and its Information*, NO.10, pp.323-344.

Έστω Σ ένα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητο, πολυμεταβλητό σύστημα το οποίο περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα, αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

Ένα πλέον γνωστό πρόβλημα που υπάρχει στην Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων είναι η αναγωγή του παραπάνω συστήματος Σ σε ένα "ισοδύναμο" σύστημα S, στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (generalized state space system), της μορφής :

$$S: \quad E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Η έννοια "ισοδύναμο" αναφέρεται στην ταύτιση των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" ιδιοτήτων των δύο συστημάτων π.χ. ταύτιση των αποσυζευγμένων μηδενικών εισόδου (εξόδου) στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, των πόλων και μηδενικών στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ του συστήματος καθώς και των πόλων και μηδενικών μεταφοράς στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Υπάρχουν δύο τρόποι να δείξουμε ότι δύο συστήματα είναι ισοδύναμα :

1. Μπορούμε να αποδείξουμε βήμα προς βήμα την ταύτιση των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" ιδιοτήτων του συστήματος.

2. Να δείξουμε ότι οι Rosenbrock πίνακες των δύο συστημάτων συνδέονται μέσω ενός συγκεκριμένου πολυωνυμικού μετασχηματισμού (του πλήρως ισοδύναμου μετασχηματισμού συστημάτων (full system equivalence) (Hayton et al (1990)) , ο οποίος έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την δομή των συστημάτων αυτών.

Τα πλεονεκτήματα της δεύτερης μεθόδου είναι φανερά εφόσον δεν χρειάζεται να καταναλωθούμε σε αποδείξεις για την ταύτιση κάθε ιδιότητας του συστήματος, παρά μόνο στην εύρεση ενός ισοδύναμου μετασχηματισμού μεταξύ των Rosenbrock πινάκων των δύο συστημάτων.

Οι Bosgra & Van Der Veiden (1981) είχαν προτείνει έναν αλγόριθμο αναγωγής ενός γενικευμένου συστήματος της μορφής Σ σε ένα σύστημα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της μορφής S. Το προτεινόμενο σύστημα έδειξαν βάσει της πρώτης μεθόδου ότι είναι ισοδύναμο με το σύστημα από το οποίο παράχθηκε.

Στην παρούσα εργασία αποδεικνύεται ότι το προτεινόμενο "ισοδύναμο" σύστημα των Bosgra & Van Der Veiden είναι ουσιαστικά ένα πλήρως ισοδύναμο σύστημα και συνεπώς βάσει της δεύτερης μεθόδου θα έχει τις ίδιες ιδιότητες με το σύστημα από το οποίο παράχθηκε. Συνεπώς δίνεται ένας χαρακτηρισμός της ισοδυναμίας που πρότειναν οι Bosgra & Van Der Veiden υπό την μορφή πλήρως ισοδύναμων μετασχηματισμών μεταξύ των Rosenbrock πινάκων των δύο συστημάτων. Επιπλέον αποδεικνύεται η ταύτιση ορισμένων επιπλέον ιδιοτήτων κάτω από τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων π.χ. ταύτιση της γενικευμένης τάξης (generalized order), ταύτιση των δεικτών εξόδου (εισόδου) (output (input) dynamical indices). Τέλος, ο πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός που συνδέει τους Rosenbrock πίνακες των δύο ισοδύναμων συστημάτων, μας οδηγεί στην εύρεση μιας σχέσης μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων, των αντίστοιχων συστημάτων.

Citations
1. Vakhtang Lomadze, 2002, Rosenbrock models and their homotopy equivalence, Linear Algebra and its Applications 351-352: 519-532.

6) Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E. and Vardulakis A.I.G., 1993, On a certain McMillan degree condition appearing in Control., *IMA Journal of Mathematical Control and its Information*, NO.10, pp.361-373.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει ορισμένες ερμηνείες των McMillan συνθηκών (McMillan degree conditions) που εμφανίζονται στον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας πολυωνυμικών πινάκων (full equivalence (Hayton et al (1988)). Μια σύνδεση των συνθηκών αυτών και μιας πρόσφατης δουλειάς του Zhang S.Y. (1989) δίνεται επίσης στην εργασία αυτή. Οι περισσότερες από τις ερμηνείες αυτές έχουν σχέση με την απόδειξη της ταύτισης της κρουστικής δομής (structure at infinity) δύο πλήρως ισοδύναμων πολυωνυμικών πινάκων. Η πλέον σημαντική ερμηνεία της συνθήκης αυτής, για την μελέτη της ισοδυναμίας γραμμικών συστημάτων, είναι η εξής :

Έστω ένα ομογενές σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$A(\rho)\beta(t)=0$$

όπου $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ με $\det[A(\rho)]\neq 0$ και $\beta(t):[0-,+\infty)\to\mathbb{R}^r$. Έστω επίσης η σχέση

$$y(t)=B(\rho)\beta(t)$$

όπου $B(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{p\times r}$ και $y(t):[0-,+\infty)\to\mathbb{R}^p$. Η παραπάνω σχέση θα είναι απεικόνιση με την συνήθη έννοια (σχέση πολλά προς ένα) εάν-ν ισχύει η παρακάτω συνθήκη :

$$\delta_M\begin{pmatrix}A(\rho)\\B(\rho)\end{pmatrix}=\delta_M\left(A(\rho)\right)$$

Citations
1. Mahmood S., 1996, *Some Structural Problems Arising in the Generalized Theory of Linear Multivariable Control Systems*, Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.

7) Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1994, Structural properties of square inverse linear systems., *Kybernetica*, Vol.30, NO.6, pp.597-606.

Έστω $G(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times p}$ με $\det[G(s)]\neq 0$ η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος Σ και $P(s)$ ο πίνακας του συστήματος. Οι Rosenbrock & Van Der Weiden (1977) πρότειναν έναν πίνακα συστήματος P(s) ο οποίος οδηγεί σε ένα σύστημα Σ, με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)^{-1}$ το οποίο ονομάζεται και αντίστροφο σύστημα του Σ. Στην ίδια εργασία παρουσιάζονται οι σχέσεις των πεπερασμένων ιδιοτήτων των δύο συστημάτων Σ και *Σ*. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε την σύνδεση των πεπερασμένων αλλά και κρουστικών ιδιοτήτων των δύο αυτών συστημάτων π.χ. πόλοι και μηδενικά του συστήματος στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, διασυζευγμένα μηδενικά στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, πόλοι και μηδενικά μεταφοράς στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ κ.λ.π. .

Προτείνεται μια γενίκευση της γνωστής ισοδυναμίας συστημάτων Morf (Morf 1975, Levy et al 1977) και αποδεικνύεται ότι η καινούργια αυτή ισοδυναμία συστημάτων ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων (Hayton et al 1990). Συνεπώς έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτες τις "πεπερασμένες" και "κρουστικές" ιδιότητες ισοδύναμων συστημάτων. Τέλος δίνεται μια χρήσιμη εφαρμογή της καινούργιας αυτής ισοδυναμίας συστημάτων στα τετράγωνα αντίστροφα συστήματα.

8) Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1994, An extension of Wolovich's definition of equivalence of Linear Systems., *IEEE Trans. on Auto. Control*, Vol.41, No.2, pp.228-232.

Ο κλασικός ορισμός της ισοδυναμίας συστημάτων του Wolovich (1974) γενικεύεται στην εργασία αυτή με σκοπό να καλύψει την εκτενέστερη μελέτη των γραμμικών συστημάτων. Η γενίκευση του ορισμού αυτού γίνεται σε τρία βήματα.

α) Στο πρώτο βήμα δίνεται η έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ ενός γενικού συστήματος και ενός γενικευμένου ιδιόμορφου συστήματος :

Έστω Σ(N) η *κανονική μορφή* (normalized form (Verghese (1978))) ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου, πολυμεταβλητού συστήματος της μορφής (1) η οποία δίνεται από τις παρακάτω αλγεβρικές και διαφορικές εξισώσεις :

$$\Sigma(N):\quad \begin{aligned} T(\rho)\xi(t)&=Uu(t)\\ y(t)&=V\xi(t)\end{aligned}$$

όπου

$$T(\rho)=\begin{pmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0\\ -C(\rho) & D(\rho) & I\\ 0 & -I & 0\end{pmatrix}\quad;\quad U=\begin{pmatrix}0\\0\\I\end{pmatrix}\quad;\quad V=\begin{pmatrix}0 & 0 & I\end{pmatrix}$$

Έστω επίσης Σ ένα γενικευμένο ιδιόμορφο σύστημα της μορφής :

$$\Sigma:\quad \begin{aligned} E\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)&=Cx(t)+Du(t)\end{aligned}$$

όπου $E,A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}, C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ και $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$. Τα συστήματα Σ(N) και Σ θα θεωρούνται **"ισοδύναμα"** εάν-ν οι παρακάτω δύο συνθήκες ισχύουν :

1) υπάρχει ένας σταθερός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων των δύο συστημάτων, της μορφής :

$$\xi(t)=C_0x(t)+D_0u(t)$$

όπου $C_0\in\mathbb{R}^{r\times n}$ και $D_0\in\mathbb{R}^{m}$.

2) τα δύο συστήματα έχουν την ίδια έξοδο εάν εφαρμόσουμε την ίδια είσοδο u(t).

Β) Στο δεύτερο βήμα αποδεικνύουμε ότι κάθε γραμμικό σύστημα Σ έχει ένα "ισοδύναμο" γενικευμένο ιδιόμορφο σύστημα Σ'.

Γ) Τέλος στο τρίτο βήμα ορίζεται η έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ δύο γενικευμένων συστημάτων :

«Έστω Σ_i με i=1,2 δύο γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, πολυμεταβλητά συστήματα της μορφής (1) με κανονικές μορφές $\Sigma_i(N)$ με i=1,2. Τα Σ_1, Σ_2 θα λέγονται **"ισοδύναμα"** εάν-ν τα ισοδύναμα τους γενικευμένα ιδιόμορφα συστήματα είναι *τέλεια ισοδύναμα* (completely system equivalent (Pugh et al 1987))».

Αποδεικνύεται επίσης ότι η γενικευμένη ισοδυναμία του Wolovich ή αλλιώς "ισοδυναμία" που αναφέρουμε παραπάνω, ταυτίζεται με την θεμελιώδη ισοδυναμία συστημάτων που προτείνεται σε άλλες εργασίες (π.χ. δες εργασία Α.3) και αποτελεί μια ερμηνεία στο πεδίο του χρόνου της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων (full system equivalence (Hayton et al (1990))).

Citations

1. Vakhtang Lomadze, 2002, Rosenbrock models and their homotopy equivalence, Linear Algebra and its Applications 351-352: 519-532.

9) Karampetakis N. P., Vardulakis A. I. G. and A.C. Pugh, 1995, A classification of generalised state space reduction methods for linear multivariable systems. *Kybernetika*, Vol.31, NO.6, pp.547-557.

Η παρούσα εργασία μελετάει το πρόβλημα της "αναγωγής" ενός γενικού γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου, πολυμεταβλητού συστήματος Σ της μορφής (1) σε ένα "ισοδύναμο" σύστημα S στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, μέσω πλήρους ισοδύναμων μετασχηματισμών.

Όλοι οι γνωστοί αλγόριθμοι "αναγωγής" συστημάτων που προτάθηκαν από τους Verghese (1978), Bosgra & Van Der Weiden (1981), Anderson et al. (1985) και Vardulakis (1991) κατηγοριοποιούνται σε δύο θεωρητικούς αλγορίθμους πλήρους ισοδύναμης "αναγωγής". Το γενικό συμπέρασμα της όλης εργασίας είναι η στενή σχέση που συνδέει τις τεχνικές εύρεσης ελάχιστης πραγμάτωσης στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων ενός ρητού πίνακα με τις τεχνικές αναγωγής γενικών συστημάτων σε πλήρως ισοδύναμα συστήματα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.

Βάσει μιας νέας μεθόδου εύρεσης, της ελάχιστης πραγμάτωσης στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα, που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή επιτυγχάνεται μια γενίκευση των γνωστών μεθόδων αναγωγής συστημάτων που προτάθηκαν από τους Wolovich (1973), (1974) και Shaooua et. al. (1988).

Citations

1. A.C. Pugh, S.J. Mcinerney, M.S. Boudellioua and G.E. Hayton, 1998, Matrix pencil equivalents of a general 2-D polynomial matrix., *International Journal of Control*, **71**, No.6, pp.1027-1050.
2. M.S. Boudellioua and B. Chentouf, 2003, A pencil equivalent of a general 2-D polynomial matrix, Proceedings of the 11th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 18-20, Rhodes, Greece.
3. Simon J. McInerney, 1999, Representations and transformations for multi-dimensional systems, Ph.D. Thesis, Department of Mathematical Sciences, Loughborough University of Technology.
4. M. S. Boudellioua, 2006, An equivalent matrix pencil for two variable polynomial matrices, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science., Vol.16, No.2, pp.175-181.
5. Iman Mohamed Omar El Nabrawy, 2006, Algebraic issues in Linear Multi-Dimensional System Theory, Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology.

10) Karampetakis N.P., 1997, Computation of the generalised inverse of a polynomial matrix and applications., *Linear Algebra and its Applications*, 252, pp.35-60.

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s)=A_0+A_1s+\cdots+A_qs^q\in R[s]^{p\times m}$. Ως γενικευμένο αντίστροφο του παραπάνω πίνακα ορίζουμε τον πίνακα $A(s)^+\in R(s)^{p\times m}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :

$$
\begin{gathered}
A(s)A^+(s)A(s)=A(s)\\
A^+(s)A(s)A^+(s)=A^+(s),\\
\left(A(s)A^+(s)\right)^T=A(s)A^+(s),\\
\left(A^+(s)A(s)\right)^T=A^+(s)A(s)
\end{gathered}
$$

$\forall s\in\mathbb{R}$. Η εύρεση του γενικευμένου αντίστροφού έχει αποτελέσει το αντικείμενο ενδιαφέροντος πολλών επιστημόνων λόγω των πολλών εφαρμογών του στην ανάλυση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων πρδ. εύρεση συνάρτηση μεταφοράς, αντίστροφα συστήματα, επίλυση συστημάτων, επίλυση διοφαντικών εξισώσεων πινάκων κ.λ.π. Η παρούσα εργασία προτείνει έναν καινούργια αλγόριθμο υπολογισμού του γενικευμένου αντίστροφου και της Laurent ανάπτυξης του στο άπειρο βασιζόμενη στην γνωστή Faddeev μέθοδο γενικεύοντας έτσι τα αποτελέσματα των Penrose (1955) και Decell (1965) καθώς και άλλων σύγχρονων εργασιών που αφορούν την αντιστροφή τετράγωνων και αντιστρέψιμων πολυωνυμικών πινάκων πρδ. Fragulis et. al. (1991). Στο τέλος της εργασίας παρουσιάζονται ως εφαρμογές της παραπάνω υπολογιστικής μεθόδου α) η εύρεση του δεξιά (αριστερά) αντίστροφου ενός ρητού πίνακα, β) η επίλυση ενός μη τετράγωνου συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με την βοήθεια μετασχηματισμών Laplace και γ) η επίλυση ενός προβλήματος σύνθεσης σε συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

Citations

1. Π. Τζέκης, 2001, Ανάπτυξη αλγορίθμων Η/Υ για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.
3. Mahmood S., 1996, *Some Structural Problems Arising in the Generalized Theory of Linear Multivariable Control Systems*, Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.
4. M Hou, A C Pugh and G E Hayton, 1998, An explicit solution to generalised systems, UKACC International Conference on CONTROL '98, 1-4 September 1998, pp.1552-1557.
5. Adi Ben-Israel and T. N.E. Greville, 2003, Generalized Inverses : Theory and Applications, 2nd Edition.
6. Predrag Stanimirovic and Milan B. Tasic, 2003, Partitioning method for rational and polynomial matrices, to appear in Applied Mathematics and Computation.
7. Abdel-Ghaffar K. A. S., 1998, Long division for Laurent series matrices and the optimal assignment problem, Linear Algebra and its Applications, 280, 189-197.
8. P. Stanimirovic, 2003, A finite algorithm for generalized inverses of polynomial and rational matrices, Applied Mathematics and Computation, Volume 144, Issues 2-3, 10 December 2003, Pages 199-214.
9. Jun Ji, 2002, A finite algorithm for the Drazin inverse of a polynomial matrix, Applied Mathematics and Computation 130(2-3): 243-251.
10. Hou, Pugh A.C. and Hayton G.E., International Journal of Control, 73, (9), 733-743, 2000.
11. Tolga Guyer, Onur Kiymaz, Goksal Bilgici and Seref Mirasyedioglu, 2001, A new method for computing the solutions of differential equation systems using generalized inverse via MAPLE, Applied Mathematics and Computation, 121, 291-299.
12. Ne'stor Javier Thome, 2001, Inversas Generalizadas y su Aplicacio'n a Sistemas Singulares de Control, Tesis Doctoral, Departamento de Matema'tica Aplicada, Universidad Polite'cnica de Valencia.
13. H. M. Möller, Exact computation of the generalized inverse and least squares solution. Ergebnisberichte Angewandte Mathematik Nr. 168 Universität Dortmund, 1999.

14. M. D. Petcovic and P. S. Stanimirovic, Symbolic computation of the Moore–Penrose inverse using a partitioning method, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 82, No. 3, March 2005, 355–367.
15. Predrag S. Stanimirovic, Marko D. Petkovic, 2006, Computing generalized inverse of polynomial matrices by interpolation, Applied Mathematics and Computation, Vol.172, pp.508-523.
16. P. S. Stanimirovic and M. B. Tasic, 2001, Drazin inverse of one variable polynomial matrices, FILOMAT, pp.71-78 (http://www.pmf.ni.ac.yu/org/filomat/f15/F15(1)10.pdf).
17. Marko D. Petkovi´c, Predrag S. Stanimirovi´c, 2007, Interpolation algorithm for computing Drazin inverse of polynomial matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.422, pp.526-539.
18. Milan B. Tasic´, Predrag S. Stanimirovic´, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*,Vol.189, Issue 1, pp.615-640.
19. K.P.S. Bhaskara Rao, 2003, The theory of generalized inverses over commutative rings, Algebra, Logic and Applications Series, Vol.17, Taylor & Francis ISBN 0415272483.
20. Marko D. Petkovic, Predrag S. Stanimirovic, 2006, Interpolation algorithm of Leverrier-Faddev type for polynomial matrices. Numer. Algorithms, 42, no.3-4, pp.345-361..
21. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2008, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, Vol.55, Issue 8, pp.1720-1734.
22. P. S. Stanimirovic and M. B. Tasic, 2008, Computing generalized inverses using LU factorization of matrix product. International Journal of Computer Mathematics, to appear.
23. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.
24. Zhang, K, 2009, A New Approach to Observer-Based Fault-Tolerant Controller Design for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with State Delay, CIRCUITS SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING, Volume: 28 Issue: 5 Pages: 679 .
25. 25. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.
26. 26. Marko D. Petkovic, 2008, SIMBOLICKO IZRACUNAVANJE HANKELOVIH DETERMINANTI I GENERALISANIH INVERZA MATRICA, Doktorska disertacija, Ni·s, Jun 2008.
27. 27. Predrag S. Stanimirović, Dimitrios Pappas, Vasilios N. Katsikis, Ivan P. Stanimirović, 2012, Symbolic computation of $A^2_{T,S}$ -inverses using QDR factorization, Linear Algebra and its Applications, Volume 437, Issue 6, 15 September 2012, Pages 1317 – 1331.
28. 28. S.H. SIMONYAN, A.G. AVETISYAN, A.S. SIMONYAN, V.R. AVINYAN, A UNIVERSAL METHOD FOR DETERMINING MOORE-PENROSE’S PARAMETRIC GENERALIZED INVERSE MATRICES, Proceedings of State Engineering University of Armenia , http://banber.seua.am/Header_PDF/1829-33361_Simonyan_Avetisyan_Avinyan_Simonyan_9-19.pdf.
29. 29. Ivan P. Stanimirovic, 2013, Algorithms for symbolic matrix computations and optimization, Doctoral dissertation, Univerzitet U Nišu.
30. 30. Liji Huang, 2012, Quaternion Equations and Quaternion Polynomial Matrices,Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg.

11) Karampetakis N.P., 1996, Comments on “Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion *Int. J. Control*, Vol. 64, NO. 3, pp.563-565.

Πρόκειται για μια διόρθωση στην εργασία :

Fragulis G., Mertzios B. G. And Vardulakis A. I., 1991, Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion, *Int. J. Control*, Vol. **53**, pp.431-443.

12) **Jones J., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1998, The computation and application of the generalised inverse via MAPLE., *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 25, No.1, pp.99-124.**

Η εργασία Α.10 έχει γενικευθεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει ρητούς και όχι μόνο πολυωνυμικούς πίνακες καθώς και έχει υλοποιηθεί στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE.

Citations

1. Π. Τζέκης, 2001, Ανάπτυξη αλγορίθμων Η/Υ για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.
3. P. Stanimirovic, 2003, A finite algorithm for generalized inverses of polynomial and rational matrices, Applied Mathematics and Computation, Volume 144, Issues 2-3, 10 December 2003, Pages 199-214.
4. Adi Ben-Israel and T. N.E. Greville, 2003, Generalized Inverses : Theory and Applications, 2nd Edition.
5. Jun Ji, 2002, A finite algorithm for the Drazin inverse of a polynomial matrix, Applied Mathematics and Computation 130(2-3): 243-251.
6. Tolga Guyer, Onur Kiymaz, Goksal Bilgici and Seref Mirasyedioglu, 2001, A new method for computing the solutions of differential equation systems using generalized inverse via MAPLE, Applied Mathematics and Computation, 121, 291-299.
7. Predrag Stanimirovic and Milan B. Tasic, 2003, Partitioning method for rational and polynomial matrices, Applied Mathematics and Computation, Vol.155, Is.1, pp:137-163.
8. Predrag S. Stanimirovic, Marko D. Petkovic, 2006, Computing generalized inverse of polynomial matrices by interpolation, Applied Mathematics and Computation, Vol.172, pp.508-523.
9. P. S. Stanimirovic and M. B. Tasic, 2001, Drazin inverse of one variable polynomial matrices, FILOMAT, pp.71-78 (http://www.pmf.ni.ac.yu/org/filomat/f15/F15(1)10.pdf).
10. Marko D. Petkovi´c, Predrag S. Stanimirovi´c, 2007, Interpolation algorithm for computing Drazin inverse of polynomial matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.422, pp.526-539.
11. Milan B. Tasic´, Predrag S. Stanimirovic´, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*, Volume: 82, Issue: 3, Pages: 355-367.
12. Marko D. Petkovic, Predrag S. Stanimirovic, 2006, Interpolation algorithm of Leverrier-Faddev type for polynomial matrices. Numer. Algorithms, 42, no.3-4, pp.345-361..
13. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2008, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, Vol.55, Issue 8, pp.1720-1734.
14. P. S. Stanimirovic and M. B. Tasic, 2008, Computing generalized inverses using LU factorization of matrix product. International Journal of Computer Mathematics, to appear.
15. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.
16. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.
17. Marko D. Petkovic, 2008, SIMBOLICKO IZRACUNAVANJE HANKELOVIH DETERMINANTI I GENERALISANIH INVERZA MATRICA, Doktorska disertacija, Ni·s, Jun 2008.
18. Stanimirović, I.P., Tasić, M.B., 2012, Computation of generalized inverses by using the LDL* decomposition, Applied Mathematics Letters,, Volume 25, Issue 3, March 2012, Pages 526-531.
19. Predrag S. Stanimirović, Dimitrios Pappas, Vasilios N. Katsikis, Ivan P. Stanimirović, 2012, Symbolic computation of $A^{2}_{T,S}$-inverses using QDR factorization, Linear Algebra and its Applications, Volume 437, Issue 6, 15 September 2012, Pages 1317 – 1331.

20. Ivan P. Stanimirović, Milan B. Tasić, 2012, Computation of generalized inverses by using the LDL-decomposition, Applied Mathematics Letters, Volume 25, Issue 3, March 2012, Pages 526 – 531.
21. Ivan P. Stanimirovic, 2013, Algorithms for symbolic matrix computations and optimization, Doctoral dissertation, Univerzitet U Nišu.

13) Karampetakis N.P., 1997, Generalised inverses of two variable polynomial matrices and applications. *Circuit Systems & Signal Processing*, Vol.16, No.4, pp.439-453.

Ο αλγόριθμος της εύρεσης του γενικευμένου αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα που παρουσιάστηκε στην εργασία A.10 γενικεύεται έτσι ώστε : α) να περιέχει ο πολυωνυμικός πίνακας A δύο μεταβλητές s, w, και β) να ικανοποιούνται οι ιδιότητες του γενικευμένου αντίστροφου $\forall (s,w) \in \mathbb{C}^2$ και όχι $\forall (s,w) \in \mathbb{R}^2$ γεγονός που κάνει και τον πίνακα αυτόν πιο χρήσιμο από αριθμητικής άποψης.

Citations

1. Π. Τζέκης, 2001, Ανάπτυξη αλγορίθμων Η/Υ για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.
3. Fanbin Bu and Yimin Wei, 2004, The algorithm for computing the Drazin inverses of two-variable polynomial matrices, Applied Mathematics and Computation, Vol.147, Issue 3, pp.805-836.
4. P. Stanimirovic, 2003, A finite algorithm for generalized inverses of polynomial and rational matrices, Applied Mathematics and Computation, Volume 144, Issues 2-3, 10 December 2003, Pages 199-214.
5. Predrag Stanimirovic and Milan B. Tasic, 2003, Partitioning method for rational and polynomial matrices, to appear in Applied Mathematics and Computation.
6. Adi Ben-Israel and T. N.E. Greville, 2003, Generalized Inverses : Theory and Applications, 2nd Edition.
7. Simon J. McInerney, 1999, Representations and transformations for multi-dimensional systems, Ph.D. Thesis, Department of Mathematical Sciences, Loughborough University of Technology.
8. M. D. Petcovic and P. S. Stanimirovic, Symbolic computation of the Moore–Penrose inverse using a partitioning method, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 82, No. 3, March 2005, 355–367.
9. Predrag S. Stanimirovic, Marko D. Petkovic, 2006, Computing generalized inverse of polynomial matrices by interpolation, Applied Mathematics and Computation, Vol.172, pp.508-523.
10. P. S. Stanimirovic and M. B. Tasic, 2001, Drazin inverse of one variable polynomial matrices, FILOMAT, pp.71-78 (http://www.pmf.ni.ac.yu/org/filomat/f15/F15(1)10.pdf).
11. Marko D. Petkovi´c, Predrag S. Stanimirovi´c, 2007, Interpolation algorithm for computing Drazin inverse of polynomial matrices, *Linear Algebra and its Applications*, to appear.
12. Milan B. Tasic´, Predrag S. Stanimirovic´, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*, to appear.
13. Marko D. Petkovic, Predrag S. Stanimirovic, 2007, Interpolation algorithm for computing Drazin inverse of polynomial matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.422, pp.526-539.
14. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2007, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, to appear.
15. P. S. Stanimirovic and M. B. Tasic, 2008, Computing generalized inverses using LU factorization of matrix product. International Journal of Computer Mathematics, to appear.
16. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.

17. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.
18. Marko D. Petkovic, 2008, SIMBOLICKO IZRACUNAVANJE HANKELOVIH DETERMINANTI I GENERALISANIH INVERZA MATRICA, Doktorska disertacija, Ni·s, Jun 2008.
19. Predrag S. Stanimirović, Dimitrios Pappas, Vasilios N. Katsikis, Ivan P. Stanimirović, 2012, Symbolic computation of $A^{2}_{T,S}$-inverses using QDR factorization, Linear Algebra and its Applications, Volume 437, Issue 6, 15 September 2012, Pages 1317 – 1331.
20. Ivan P. Stanimirovic, 2013, Algorithms for symbolic matrix computations and optimization, Doctoral dissertation, Univerzitet U Nišu.

14) Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Hayton G.E., 1997, Notes on a hierarchical theory of systems., *Kybernetica*, 33, No.2, pp.185-201.

Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα, πολυμεταβλητά συστήματα μπορούν να θεωρηθούν ως μια διασύνδεση άλλων υποσυστημάτων που και εκείνα με την σειρά τους αποτελούν μια διασύνδεση άλλων υποσυστημάτων χαμηλότερης τάξης κ.ο.κ. (Rosenbrock & Pugh 1974). Διαμέσου της έννοιας της ιεραρχικής θεωρίας συστημάτων οι Rosenbrock & Pugh (1974) μελέτησαν τις εφαρμογές της αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων (strict system equivalence) (Rosenbrock 1970) στην ιεραρχική θεωρία συστημάτων. Στην περίπτωση όμως που η κρουστική συμπεριφορά των συστημάτων αυτών μας ενδιαφέρει το ίδιο όσο και η ομαλή συμπεριφορά τότε τα αποτελέσματα των Rosenbrock & Pugh (1974) χρειάζονται μια γενίκευση. Η γενίκευση αυτή είναι απαραίτητη λόγω του ότι η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτη μόνο την ομαλή και όχι την κρουστική συμπεριφορά ενός συστήματος. Σκοπός της παραπάνω εργασίας είναι να γενικεύσει τα αποτελέσματα των Rosenbrock & Pugh (1974) ούτως ώστε η κρουστική και η ομαλή συμπεριφορά των συστημάτων αυτών να μελετάται εξίσου. Ένας επιπλέον σκοπός της εργασίας αυτής είναι να προτείνει ως εφαρμογή της παραπάνω θεωρίας μια λύση στο πρόβλημα της αναγωγής ενός γενικού γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος (polynomial matrix model) σε ένα ισοδύναμο γενικευμένο ιδιόμορφο σύστημα (generalized state space system).

15) Karampetakis N.P., 1997, Comments on "Reachability of polynomial matrix descriptions (PMDs)". *Circuits Systems & Signal Processing.* 16, No.5, pp.559-568.

Η παρούσα εργασία επεκτείνει τα αποτελέσματα της εργασίας :

Fragulis G. and Vardulakis A.I., 1995, Reachability of polynomial matrix descriptions, *Circuit Systems & Signal Process*, Vol.**14**, No.6, pp.787-815.

στην περίπτωση που το υπό μελέτη σύστημα έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες εισόδου.

16) Mahmood S., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1998, Structural properties of column (row) reduced MFDs, *International Journal of Control*, 69, No.1, pp.111-130.

Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται ότι κάθε ρητός πίνακας μπορεί να γραφεί με την μορφή συγκεκριμένων πολυωνυμικών κλασματικών εκφράσεων (matrix fraction descriptions) οι οποίες μας δίδουν πληροφορίες της δομής του ρητού πίνακα στο άπειρο. Μεταξύ των αποτελεσμάτων της παραπάνω εργασίας, υπάρχουν δύο αλγόριθμοι, τον οποίων ο συνδυασμός μας δίδει α) την μορφή που θα έχει αυτή η πολυωνυμική κλασματική παράσταση για κάθε ρητό πίνακα και β) μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για το πότε μια τυχαία πολυωνυμική κλασματική παράσταση ενός ρητού πίνακα είναι σε θέση να μας πληροφορήσει πλήρως για την δομή του πίνακα αυτού στο άπειρο.

17) Mahmood S., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1998, Solvability, reachability and controllability of regular PMDs, *International Journal of Control*, 70, No.4, pp.617-630.

Έστω Σ ένα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητο, πολυμεταβλητό σύστημα της μορφής :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

Είναι γνωστό από προηγούμενες εργασίες όπως για παράδειγμα η Β.1, ότι μπορούμε με συγκεκριμένους αλγόριθμους να αναγάγουμε το σύστημα Σ σε ένα "ισοδύναμο" σύστημα S, στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (generalized state space system), της μορφής :

$$S: \quad E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ το οποίο διατηρεί αναλλοίωτη την ομαλή και κρουστική συμπεριφορά του συστήματος Σ. Μάλιστα όπως έχει αποδειχθεί και στην εργασία Α.3 υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των λύσεων των δύο συστημάτων καθώς και μεταξύ των αρχικών συνθηκών των δύο συστημάτων όπως άλλωστε φαίνεται στην εργασία Β.17. Ως αποτέλεσμα οι ελέγξιμοι και παρατηρίσιμοι χώροι του συστήματος S μεταφέρονται μέσω των ισομορφισμών αυτών στους αντίστοιχους του συστήματος Σ. Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα αυτή μεταφέρουμε τα ήδη γνωστά κριτήρια ελεγξιμότητας και παρατηρισιμότητας (Yip & Sincovec 1981) καθώς και την κλειστή φόρμουλα λύσης των συστημάτων στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της μορφής S στα πιο γενικά συστήματα της μορφής Σ.

18) Antoniou S., Vardulakis A.I. and Karampetakis N.P., 1998, A spectral characterization of the behavior of discrete time AR-Representations over a finite time interval, *Kybernetica*, Vol.34, No.5, pp.555-564.

Θεωρείστε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από αλγεβρικές και συνήθεις εξισώσεις διαφορών :

$$\Sigma: \quad R(\sigma)w(t) = 0$$

όπου $\sigma w(t) = w(t+1)$ είναι ο τελεστής μετατόπισης, $R(s) \in \mathbb{R}[\sigma]^{p\times p}$, $rank_{\mathbb{R}(s)} R(s) = p$ και $w(t):[0,N] \to \mathbb{R}^m$ είναι μια m-διάστατη συνάρτηση. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει τον χώρο λύσεων του παραπάνω συστήματος. Όπως αποδεικνύουμε ο χώρος λύσεων του παραπάνω συστήματος είναι στενά συνδεδεμένος με την αλγεβρική δομή του πίνακα R(s). Αποδεικνύουμε ότι η διάσταση του χώρου λύσεων είναι ίση με $f = n + \mu$ όπου n={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $\mathbb{C}$ του πίνακα $R(s)$ συμπεριλαμβανομένης και της τάξης}, και μ={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $s = \infty$ του πίνακα $R(s)$ (συμπεριλαμβανομένης και της τάξης) προσαυξημένο του καθενός κατά ένα}. Αλγόριθμοι για την δημιουργία του χώρου λύσεων δίνονται στην εργασία αυτή.

Citations

1. E. Antoniou and A.I. Vardulakis, 2003, Fundamental equivalence of discrete-time AR representations , Int. J. Control, Vol.76, No.11, 1078-1088.
2. Henri Bourles, 2003, Impulsive behaviours of discrete and continuous time varying systems: A unified approach, ECC’03.
3. Henri Bourles, 2002, A new look on poles and zeros at infinity in the light of systems interconnection, IEEE CDC 2002, Las Vegas, Nevada, December 10-13, 2002, Paper WeP05-4.
4. Henri Bourles, 2005, Impulsive systems and behaviors in the theory of linear dynamical systems, Forum Mathematicum, Volume: 17, Issue: 5, Pages: 781-807.

19) Karampetakis N. P., Jones J. and Antoniou S., 2001, Forward, backward and symmetric solutions of discrete ARMA-representations, *Circuit Systems & Signal Processing,* 20, No.1, pp.89-109.

Έστω Σ η κατηγορία των γραμμικά, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων τα οποία περιγράφονται, από το παρακάτω σύστημα, εξισώσεων διαφορών :

$$\Sigma: \quad A(\sigma)y(k) = B(\sigma)u(k)$$

όπου $\sigma y(k) = y(k+1)$, $A(s) = A_0 + A_1 s + \cdots + A_q s^q \in R[s]^{r\times r}$ με $\det[A(\sigma)] \neq 0$, $B(s) = B_0 + B_1 s + \cdots + B_q s^q \in R[s]^{r\times m}$, $u(k):[0,N] \to \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος, $y(k):[0,N] \to \mathbb{R}^r$ είναι η έξοδος του συστήματος. Συστήματα της παραπάνω μορφής έχουν εφαρμογές στην ανάλυση κυκλωμάτων (Newcomb 1981), νευρωνικά δίκτυα (DeClaris 1984), οικονομικά (το μοντέλο Leontieff, Luenberger 1978 κ.τ.λ.). Έστω επίσης :

$$A(s)^{-1} = H_u s^u + \cdots + H_1 s + H_0 + H_{-1}s^{-1} + \cdots$$

$$A(s)^{-1} = V_{-l}s^{-l} + \cdots + V_{-1}s^{-1} + V_0 + V_1 s^1 + \cdots$$

όπου $\{H_i, i \in Z\}$ είναι η ακολουθία πινάκων της Laurent ανάπτυξης στο $s = \infty$ του $A(s)^{-1}$ ενώ $\{V_i, i \in Z\}$ είναι η ακολουθία πινάκων της Laurent ανάπτυξης στο $s = 0$ του $A(s)^{-1}$.

Σκοπός λοιπόν της εργασίας αυτής είναι η ανεύρεση τριών κλειστών φόρμουλων λύσεως του παραπάνω συστήματος :

α) $y(k) = f\begin{pmatrix} H_{-k-q}, H_{-k-q-1}, \ldots, H_u, A_1, A_2, \ldots, A_q, B_0, B_1, \ldots, B_q, \\ y(0), y(1), \ldots, y(q-1), u(0), u(1), \ldots, u(k+u+q) \end{pmatrix}$

ή

$$y(k) = f\begin{pmatrix} H_{-q}, H_{-q-1}, \ldots, H_u, A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, B_0, B_1, \ldots, B_q, \\ y(k-1), y(k-2), \ldots, y(k-q), u(k-q), u(k-q+1), \ldots, u(k+u+q) \end{pmatrix}$$

εύρεση δηλαδή του $y(k)$ σε συνάρτηση με τις προηγούμενες q τιμές του $y(k)$ ή των αρχικών τιμών του $y(k)$ και τις τιμές της εισόδου $u(k)$ (forward solution).

β) $y(k) = f\begin{pmatrix} V_{N-k}, V_{N-k-1}, \ldots, V_{-l}, A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, B_0, B_1, \ldots, B_q, \\ y(N), y(N-1), \ldots, y(N-q+1), u(N), u(N-1), \ldots, u(k-l) \end{pmatrix}$

ή

$$y(k) = f\begin{pmatrix} V_q, V_{q-1}, \ldots, V_{-l}, A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, B_0, B_1, \ldots, B_q, \\ y(k+q), y(k+q-1), \ldots, y(k+1), u(k+q), u(k+q-1), \ldots, u(k-l) \end{pmatrix}$$

εύρεση δηλαδή του $y(k)$ σε συνάρτηση με τις επόμενες q τιμές του $y(k)$ ή των τελικών τιμών του $y(k)$ και τις τιμές της εισόδου $u(k)$ (backward solution).

γ)

$$y(k) = f\begin{pmatrix} H_{N-k}, H_{N-k-1}, \ldots, H_{-k-q}, A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, A_q, B_0, B_1, \ldots, B_q, \\ y(N), y(N-1), \ldots, y(N-q+1), y(0), y(1), \ldots, y(q-1), u(N), u(N-1), \ldots, u(0) \end{pmatrix}$$

εύρεση δηλαδή του $y(k)$ σε συνάρτηση με τις αρχικές και τελικές τιμές του $y(k)$ και τις τιμές της εισόδου $u(k)$ (symmetric solution).

Οι παραπάνω λύσεις υλοποιήθηκαν στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE και παρουσιάστηκαν στην εργασία Β.20 και Β.21. Τα κύρια πλεονεκτήματα της παραπάνω μεθόδου είναι α) ότι επιλύει γραμμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών, στην πιο γενική τους μορφή και β) ότι βοηθάει στην ανάλυση, σύνθεση και σχεδίαση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων επειδή είναι εύκολα υπολογίσιμη.

Citations

1. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

2. Goncharenko VA, Goncharenko VI, 2003, Influence of force structure on the stability, 2003 INTERNATIONAL CONFERENCE PHYSICS AND CONTROL, VOLS 1-4, PROCEEDINGS - VOL 1: PHYSICS AND CONTROL: GENERAL PROBLEMS AND APPLICATIONS; VOL 2: CONTROL OF OSCILLATIONS AND CHAOS; VOL 3: CONTROL OF MICROWORLD PROCESSES. NANO- AND FEMTOTECHNOLOGIES; VOL 4: NONLINEAR DYNAMICS AND CONTROL Pages: 1121-1123.

20) **Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Hayton G.E., 1998, The output zeroing problem for general polynomial descriptions., *International Journal of Control*, Vol.71, No.6, pp.1069-1086.**

Έστω Σ ένα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητο, πολυμεταβλητό σύστημα της μορφής :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

Το γενικό πρόβλημα μηδενικής-εξόδου έχει ως αντικείμενο την εύρεση του συνόλου των αρχικών συνθηκών της ψευδοκατάστασης $\beta(t)$ και των εισόδων $u(t)$ που μηδενίζουν την έξοδο $y(t)$. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του μη τετράγωνου ομογενούς συστήματος διαφορικών εξισώσεων :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{pmatrix}}_{P(\rho)} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{pmatrix}}_{\xi(t)} = 0$$

Αποδεικνύουμε ότι η εύρεση του χώρου λύσεων του παραπάνω συστήματος έχει στενή σχέση με την πεπερασμένη και άπειρη μηδενική δομή (finite and infinite zero structure) καθώς και με την δεξιά μηδενική δομή (right null structure) του πίνακα $P(\rho)$. Αντιθέτως η αριστερή μηδενική δομή (left null structure) του πίνακα $P(\rho)$ συνδέεται με την ύπαρξη λύσης του παραπάνω συστήματος. Τα παραπάνω αποτελέσματα αποτελούν γενίκευση των αντίστοιχων ερμηνειών που έχουν δοθεί από τους MacFarlane & Karcanias (1976) για συστήματα στον χώρο των καταστάσεων (state space systems).

Citations

1. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.
2. Zaris, P., Wood, J., Pillai, H. and Rogers, E. (2001) On Invariant Zeros of Multidimensional (nD) Linear Systems. In Proceedings of Proc. of the European Control Conference ECC'01, pages pp. 1662-1667.
3. P. Zaris, J. Wood, H. Pillai, E. Rogers, 2006, On invariant zeros of linear systems of PDEs, Linear Algebra and its Applications, Vol.417, Issue 1, pp.275-297.

21) **P. Tzekis, N. P. Karampetakis and A.I. Vardulakis, 1999, On the division of polynomial matrices, *IMA Journal of Control and its Information*, Vol.16, Issue 4, pp.391-401.**

Έστω :

$$B(s) = B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \cdots + B_m \in R[s]^{p\times q} \quad B_0 \neq 0_{p\times q}$$
$$A(s) = A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \cdots + A_n \in R[s]^{q\times q} \quad A_0 \neq 0_{q\times q}, m \geq n \text{ και } \det[A(s)] \neq 0$$

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει δύο καινούργιους αλγορίθμους διαίρεσης του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ με τον πίνακα $B(s)$. Ο πρώτος αλγόριθμος αποτελεί γενίκευση του γνωστού αλγορίθμου του Lewis (1986) ο οποίος προτάθηκε για την ειδική περίπτωση που $A(s) = sE - A$, ενώ ο δεύτερος αλγόριθμος αποτελεί γενίκευση του αλγορίθμου που προτάθηκε στο βιβλίο του Gantmacher (1959) και ο οποίος αφορά την περίπτωση που $A(s) = sI - A$. Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδιαφέρουσες εφαρμογές των παραπάνω αλγορίθμων όπως α) η γενίκευση του θεωρήματος των Cayley-Hamilton και β) η έκφραση του συμπληρωματικού (adjoint) ενός πολυωνυμικού πίνακα ως προς τα Tschirnhausen πολυώνυμα.

22) Karampetakis N. P. And Vardulakis A.I., 2000, On the reduction of a polynomial matrix model of a linear multivariable system to generalized state space form., *IMA Journal of Control and its Information*, 17, pp.1-42.

Έστω Σ ένα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητο, πολυμεταβλητό σύστημα το οποίο περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα, αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

Ένα πλέον γνωστό πρόβλημα που υπάρχει στην Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων είναι η αναγωγή του παραπάνω συστήματος Σ σε ένα "ισοδύναμο" σύστημα S, στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (generalized state space system), της μορφής :

$$S: \quad E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Η έννοια "ισοδύναμο" αναφέρεται στην ταύτιση των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" ιδιοτήτων των δύο συστημάτων π.χ. ταύτιση των αποσυζευγμένων μηδενικών εισόδου (εξόδου) στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, των πόλων και μηδενικών στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ του συστήματος καθώς και των πόλων και μηδενικών μεταφοράς στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να προτείνει τις γενικεύσεις σε 6 γνωστούς τρόπους αναγωγής συστημάτων (Wolovich 1973, Verghese 1978, Bosgra & Van Der Weiden 1981, Zhang 1989, Tan & Vandewall 1988, Vardulakis 1991) και επιπλέον να δείξει ότι όλοι αυτοί οι τρόποι αναγωγής προέρχονται από μετασχηματισμούς πλήρους ισοδυναμίας του συστήματος Σ. Μάλιστα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες μετασχηματισμών, όπου στην πρώτη κατηγορία είναι απαραίτητη η πραγμάτωση του πίνακα

$$T(s) = \begin{pmatrix} A(s) & B(s) & 0 \\ -C(s) & D(s) & I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ στην δεύτερη κατηγορία είναι απαραίτητη η πραγμάτωση του αντίστροφου του πίνακα πρδ. $T(s)^{-1}$.

23) Vardulakis A.I.G., Antoniou S. and Karampetakis N. P., 1999, On the solution and impulsive behavior of polynomial matrix descriptions of free linear multivariable systems, *International Journal of Control*, 72, NO.3, pp.215-228.

Στην εργασία αυτή εξετάζεται η λύση και η κρουστική συμπεριφορά ενός αυτόνομου γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος του οποίου η ψευδοκατάσταση $\beta(t)$ ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων $A(\rho)\beta(t) = 0$ (ο πίνακας $A(\rho)$ είναι πολυωνυμικός εξαρτώμενος από τον διαφορικό τελεστή $\rho := d/dt$). Με τον τρόπο αυτό γενικεύεται η υπάρχουσα θεωρία για συστήματα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (generalized state space systems) χωρίς είσοδο (Verghese 1978), στην γενική πολυωνυμική περίπτωση.

Citations

1. Bernhard P. Lampe und Efim N. Rosenwasser, 2003, Strukturierte Polvorgabe fur PMD Prozesse, Theoretische Arbeit, Automatisierungstechnik, 51 (2003) 3 Oldenourg Verlag pp.119-126.
2. Lomadze V., 2009, Generalised) autoregressive models and their trajectories, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL Volume: 82 Issue: 10 Pages: 1929-1936.

3. Trenn, Stephan, 2010, Regularity of distributional differential algebraic equations, MATHEMATICS OF CONTROL SIGNALS AND SYSTEMS, Vol. 21, Issue: 3, pp. 229-264.
4. Vakhtang Lomadze, Hasan Mahmood, 2010, Smooth/impulsive linear systems: Axiomatic description, Linear Algebra and its Applications 433 (2010) 1997–2009.

24) N. P. Karampetakis and P. Tzekis, 2001, On the computation of the inverse of a polynomial matrix, *IMA Journal of Control and its Information*, 18, No.1, pp.83-97.

Στόχος της παραπάνω ερευνητικής εργασίας είναι να βελτιστοποιήσει τους προτεινόμενους αλγόριθμους [A10], [A13] για τον υπολογισμό του γενικευμένου αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα. Ενώ στις προηγούμενες περιπτώσεις το πλήθος των πινάκων που χρησιμοποιούνταν σε υπολογισμούς ήταν συνάρτηση του μεγαλύτερου βαθμού του πολυωνυμικού πίνακα, στην εργασία αυτή το πλήθος των πινάκων αυτών είναι συνάρτηση των ξεχωριστών δυνάμεων που εμφανίζονται μέσα στον πολυωνυμικό πίνακα.

Citations
1. P. Stanimirovic, 2003, A finite algorithm for generalized inverses of polynomial and rational matrices, Applied Mathematics and Computation, Volume 144, Issues 2-3, 10 December 2003, Pages 199-214.
2. Predrag S. Stanimirovic, Marko D. Petkovic, 2006, Computing generalized inverse of polynomial matrices by interpolation, Applied Mathematics and Computation, Vol.172, pp.508-523.
3. Milan B. Tasic´, Predrag S. Stanimirovic´, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*,Vol.189, Issue 1, pp.615-640.
4. Marko D. Petkovic, Predrag S. Stanimirovic, 2006, Interpolation algorithm of Leverrier-Faddev type for polynomial matrices. Numer. Algorithms, 42, no.3-4, pp.345-361..
5. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2007, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, to appear.
6. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.
7. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.
8. Marko D. Petkovic, 2008, SIMBOLICKO IZRACUNAVANJE HANKELOVIH DETERMINANTI I GENERALISANIH INVERZA MATRICA, Doktorska disertacija, Ni·s, Jun 2008.
9. Nitin Vats, 2009, NNRU, a noncommutative analogue of NTRU. http://arxiv.org/abs/0902.1891, CGC (Combinatorial Group Theory and Cryptography) Bulletin 24.

25) N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, 2003, DFT calculation of the generalized and Drazin inverse of a polynomial matrix, *Applied Mathematics and Computation*, 143, Issues 2-3, November 10, 2003, pp.501-521.

Ένας νέος αλγόριθμος παρουσιάζεται για τον υπολογισμό : α) του γενικευμένου αντίστροφου, και β) του Drazin αντίστροφου ενός πολυωνυμικού πίνακα. Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι βασίζονται στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier και συνεπώς είναι υπολογιστικά γρηγορότεροι από τους έως τώρα γνωστούς αλγορίθμους. Οι παραπάνω αλγόριθμοι υλοποιούνται στη γλώσσα προγραμματισμού του Mathematica και δίνονται αρκετά παραδείγματα από την υλοποίηση των αλγορίθμων.

Citations

1. Marko D. Petkovi´c, Predrag S. Stanimirovi´c, 2007, Interpolation algorithm for computing Drazin inverse of polynomial matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.422, pp.526-539.
2. Milan B. Tasic´, Predrag S. Stanimirovic´, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*,Vol.189, Issue 1, pp.615-640.
3. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2008, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, Volume: 55, Issue: 8, Pages: 1720-1734.
4. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.
5. Antoniou G. E., 2005, n-Order linear state space systems: Computing the transfer function using the DFT, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.170, Is. 2, pp.1077-1084.
6. Antoniou GE, n-Order linear state space systems: Computing the transfer function using the DFT, *Applied Mathematics and Computation*, Vol:170, Issue:2, pp.1077-1084.
7. Marko D. Petkovic, 2008, SIMBOLICKO IZRACUNAVANJE HANKELOVIH DETERMINANTI I GENERALISANIH INVERZA MATRICA, Doktorska disertacija, Ni·s, Jun 2008.
8. Yu, Yaoming,, Wang, Guorong, 2009, DFT calculation for the{2}-inverse of a polynomial matrix with prescribed image and kernel, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.215, Issue: 7, pp. 2741-2749.

26) J. Jones, N. P. Karampetakis and A.C. Pugh, 2003, Solutions of discrete ARMA-representations via Maple, *Applied Mathematics and Computation*, 139, Issues 2-3, July 15, 2003, pp.437-489.

Στην εργασία Α.19 προτείνονται κλειστές φόρμουλες λύσης για την προς τα εμπρός (forward), προς τα πίσω (backward) και την συμμετρική λύση ARMA περιγραφών διακριτών συστημάτων. Στην εργασία αυτή οι παραπάνω φόρμουλες υλοποιούνται στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE, ενώ επιπλέον δίνονται παραδείγματα υλοποίησης των παραπάνω προγραμμάτων.

27) N. P. Karampetakis, 2003, Descriptor realizations of autoregressive AR-representations, *IMA Journal of Control and its Information,* 21, 207-221.

Στην εργασία των Pugh et. al. (1998) (δες Β.4) είχε ορισθεί η ισοδυναμία μεταξύ ομογενών γραμμικών συστημάτων τα οποία αποτελούνται από αλγεβρικές και συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οποιοδήποτε βαθμού :

$$\Sigma_i : \; A_i(\rho)\beta_i(t) = 0$$

όπου $\rho := d/dt$, $A_i(\rho) \in R[\rho]^{p_i \times m_i}, rank_{R(\rho)} A_i(\rho) = r_i \le \min(p_i, m_i)$ και $\beta_i(t) : [0-,\infty) \mapsto R^{m_i}$. Πιο συγκεκριμένα δύο ομογενή γραμμικά συστήματα ονομάζονται θεμελίωδη ισοδύναμα (fundamentally equivalent) εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας πολυωνυμικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων λύσεων τους. Στηριζόμενοι στην παραπάνω ισοδυναμία προτείναμε μια μέθοδο αναγωγής ενός πολυωνυμικού ομογενούς συστήματος

$$\Sigma : \; A(\rho)\beta(t) = 0$$

όπου $\rho := d/dt$, $A(\rho) \in R[\rho]^{p_1 \times m_1}, rank_{R(\rho)} A(\rho) = r_1 \le \min(p_1, m_1)$ και $\beta(t) : [0-,\infty) \mapsto R^{m_1}$ σε ένα θεμελιώδες ισοδύναμο σύστημα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων :

$$\Sigma : \; E\dot{w}(t) = Aw(t)$$

όπου $\rho := d/dt$, $\rho E - A \in R[\rho]^{p_2 \times m_2}$ $, rank_{R(\rho)}(\rho E - A) = r_2 \leq \min(p_2, m_2)$ και $w(t) : [0-, \infty) \mapsto R^{m_2}$.

28) N. P. Karampetakis, 2003, On the discretization of singular systems, *IMA Journal of Control and its Information,* 21, pp.223-242.

Θεωρείστε ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, ιδιόμορφο σύστημα της μορφής :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

όπου $E, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}$ and $D \in R^{p\times m}$ με $\det[sE - A] \neq 0$. Στην εργασία αυτή προτείνονται δύο διακριτοποιημένα μοντέλα του παραπάνω συστήματος (μηδενικής-τάξης ως προς την είσοδο και πρώτης τάξης ως προς τις παραγώγους της εισόδου) : α) το ένα στον χώρο των καταστάσεων (state space), της μορφής

$$x((k+1)T) = Ax(kT) + B(\sigma)u(kT)$$

όπου $B(\sigma) = B_0 + B_1\sigma + \cdots + B_q\sigma^q$ και $\sigma u(kT) = u((k+1)T)$, και β) το άλλο ιδιόμορφο (descriptor system), της μορφής :

$$Ex((k+1)T) = Ax(kT) + Bu(kT)$$

Επιπλέον των παραπάνω μοντέλων δίνεται ο κώδικας στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού Mathematica για την υλοποίηση των παραπάνω διακριτοποιήσεων καθώς και ένα σύνολο παραδειγμάτων.

Citation

1. Kalogeropoulos GI, Karageorgos AD, Pantelous AA, 2009, Discretising effectively a linear singular differential system by choosing an appropriate sampling period, IET CONTROL THEORY AND APPLICATIONS, Volume: 3, Issue: 7, Pages: 823-833.
2. Francisco-Ronay López-Estrada, Didier Theilliol, Carlos Manuel Astorga Zaragoza, Jean-Christophe Ponsart, 2012, Developments of a Scilab/Matlab toolbox dedicated to LTI/LPV descriptor systems for fault diagnosis, 10th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD 2012.
3. Ali Al-Matouq, Tyrone Vincent and Luis Tenorio, 2013, Reduced Complexity Dynamic Programming Solution for Kalman filtering of Linear Discrete Time Descriptor Systems, 2013 American Control Conference (ACC), Washington, DC, USA, June 17-19, 2013.

29) N. Karampetakis and S. Vologiannidis, 2003, Infinite elementary divisor structure-preserving transformations for polynomial matrices, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol.13, No.4, pp.493-503.

Ας θεωρήσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $A(\sigma) = A_0 + A_1\sigma + \cdots + A_q\sigma^q$. Ορίζουμε ως ομογενή μορφή του πίνακα A(σ) τον πίνακα $A^H(\sigma, r) = A_0 r^q + A_1\sigma r^{q-1} + \cdots + A_q\sigma^q$. Οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του πολυωνυμικού πίνακα A(σ) είναι οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του $A^H(s,1)$, ενώ οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο του A(σ) είναι οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες στο r=0 του πίνακα $A^H(1,r)$. Στηριζόμενοι στις σχέσεις αυτές αλλά και στις γνωστές ισοδυναμίες μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων δύο μεταβλητών, προτείνεται μια νέα ισοδυναμία μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων (factor equivalence) η οποία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτους τους στοιχειώδεις πεπερασμένους διαιρέτες αλλά και τους διαιρέτες στο άπειρο. Στην ίδια εργασία προτείνεται μια νέα ισοδυναμία, η divisor equivalence, μεταξύ μη τετράγωνων πολυωνυμικών πινάκων που αποδεικνύεται ότι έχει παρόμοιες ιδιότητες με την factor equivalence. Πετυχαίνουμε λοιπόν μέσω δύο διαφορετικών οδών : α) της πολυωνυμικής μεθόδου, και β) της ομογενούς πολυωνυμικής μεθόδου, να προσεγγίσουμε την έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ δύο πολυωνυμικών πινάκων, με στόχο την διατήρηση των διαιρετών των πολυωνυμικών πινάκων.

Citations

1. P. Lancaster, 2008, Linearization of regular matrix polynomials, Electronic Journal of Linear Algebra,Vol.17, pp.21-27.

30) N. P. Karampetakis, 2004, On the solution space of discrete time AR-representations over a finite time horizon. *Linear Algebra and its Applications*, 382, pp.83-116.

Θεωρείστε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από αλγεβρικές και συνήθεις εξισώσεις διαφορών :

$$\Sigma: \quad A(\sigma)w(k)=0$$

όπου $A(\sigma)=A_0+A_1\sigma+\cdots+A_q\sigma^q\in R[\sigma]^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(\sigma)}A(\sigma)=r\leq\min(p,m)$ και $w(k):[0,N]\to\mathbb{R}^m$ είναι μια m-διάστατη συνάρτηση. Τα παραπάνω συστήματα ονομάζονται nonregular AR-representations. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει τον χώρο λύσεων του παραπάνω συστήματος. Όπως αποδεικνύεται ο χώρος λύσεων του παραπάνω συστήματος είναι στενά συνδεδεμένος με την αλγεβρική δομή του πίνακα $A(\sigma)$. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι α) ο χώρος λύσεων αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας αντί συγκεκριμένων *m*-διάστατων συναρτήσεων και β) ότι η διάσταση του χώρου λύσεων είναι ίση με $f=n+\mu+2\varepsilon$ όπου n={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $\mathbb{C}$ του πίνακα $A(\sigma)$ (συμπεριλαμβανομένης και της τάξης)}, μ={το συνολικό πλήθος των στοιχειωδών διαιρετών στο $s=\infty$ του πίνακα $A(\sigma)$ (ως προς την τάξη), και ε={το πλήθος των δεξιά ελαχίστων δεικτών του πίνακα $A(\sigma)$ (συμπεριλαμβανομένης και της τάξης)}. Η συμβολή της αριστεράς μηδενικής δομής του είναι στο να παράγει ένα σύνολο παραδεκτών αρχικών συνθηκών κάτω από τις οποίες το σύστημα δεν έχει λύση. Αλγόριθμοι για την δημιουργία του χώρου λύσεων και του συνόλου των παραδεκτών αρχικών συνθηκών δίνονται στην εργασία αυτή.

31) S. Vologiannidis and N. Karampetakis, 2004, Inverses of multivariable polynomial matrices by discrete Fourier transforms, *Multidimensional Systems and Signal Processing,* 15, pp.341-361.

Η εργασία αυτή αποτελεί συνέχεια της εργασίας Α.25 και έχει ως στόχο την κατασκευή των γενικευμένων αντίστροφων αλλά και του Drazin αντίστροφου πολυμεταβλητών πολυωνυμικών πινάκων κάνοντας χρήση των πολυδιάστατων διακριτών μετασχηματισμών Fourier. Βασικό πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι η βελτίωση της πολυπλοκότητας και συνεπώς του χρόνου υλοποίησης των αλγορίθμων αυτών.

Citations

1. Lobo, R., Bitzer D.L., and M.A. Vouk, "Inverses of Multivariate Polynomial Matrices using Discrete Convolution," Proceedings of the International Workshop on Coding and Cryptography (WCC05), March 14-18, 2005, Bergen (Norway).
2. Lobo, R., Bitzer D.L., and M.A. Vouk, 2006, Locally invertible multivariate polynomial matrices, CODING AND CRYPTOGRAPHY, LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE, 3969: 427-441 2006.
3. Milan B. Tasic´, Predrag S. Stanimirovic´, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*, Volume: 189 Issue: 1 Pages: 615-640.
4. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2008, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 55, Issue 8, pp. 1720-1734.
5. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.
6. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, *Applied Mathematics and Computation*, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.

32) N. Karampetakis, S. Vologiannidis and A.I. Vardulakis, 2003, On a new equivalence for polynomial matrices, *International Journal of Control,* Vol.77, No.6, pp.584-597.

Αποτελεί μια αναλυτική παρουσίαση των εργασιών B.43 και B.46.

33) N. P. Karampetakis and P. Tzekis, 2005, On the computation of the minimal polynomial of a polynomial matrix, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*,Vol.15, No.3, pp.339-349.

Η εργασία προτείνει δύο αλγόριθμους για τον υπολογισμό του ελάχιστου πολυωνύμου ενός πολυωνυμικού πίνακα. Ο πρώτος τρόπος βασίζεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων, ενώ ο δεύτερος αλγόριθμος στηρίζεται σε τεχνικές μετασχηματισμών DFT και FFT οι οποίες αυξάνουν την ταχύτητα και ελαχιστοποιούν την πολυπλοκότητα σε σχέση με τον πρώτο αλγόριθμο. Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι είναι εύκολα υλοποιήσιμοι σε υπολογιστή. Η θεωρία συνοδεύεται από αναλυτικά παραδείγματα.

34) N. P. Karampetakis and A.I.G. Vardulakis, 2006, Special Issue on the Use of Computer Algebra Systems for Computer Aided Control Systems Design, *International Journal of Control*, Vol.79, No.11, pp.1313-1320.

Η ειδική αυτή έκδοση, η οποία επιμελήθηκε από τους Ν. Καραμπετάκη και Α. Βαρδουλάκη, έχει ως στόχο να τονίσει τον ρόλο της υπολογιστικής άλγεβρας στην Ανάλυση, Σύνθεση και Σχεδίαση Συστημάτων με την Βοήθεια Η/Υ. Στην εισαγωγή αυτή γίνεται αναφορά στις κατηγορίες υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας που υπάρχουν, στο ιστορικό ανάπτυξης τους, στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τους καθώς και σε εφαρμογές που μπορούν να έχουν σε συστήματα CACSD. Το τεύχος αυτό αφιερώθηκε στην μνήμη του Καθ. N. Munro που ήταν για πολλά χρόνια director στο UMIST Control Systems Center.

Citations

1. Krishnachandran, V.N., Joy, R.C., Siji, K.B. ,2012, More CAS's in maths classrooms: An urgent imperative, 2012 IEEE International Conference on Technology Enhanced Education (ICTEE), 3-5 Jan. 2012, Kerala.

35) Predrag S. Stanimirović, N. P. Karampetakis and Milan B. Tasić, 2007, Computing generalized inverses of a rational matrix and applications, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Vol.24, No.1-2, pp.81-94.

Στην εργασία αυτή προτείνεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του Drazin αντίστροφου ενός ρητού πίνακα, μέσω μιας τροποποίησης του Leverrier-Faddeev αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος υλοποιείται στο υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας Mathematica. Στο δεύτερο σκέλος της εργασίας επιλύεται ένα σύνολο εξισώσεων μεταξύ ρητών πινάκων με την βοήθεια του Moore-Penrose αντίστροφου και του Drazin αντίστροφου.

Citations

1. N. Matzakos D. Pappas, 2009, EP matrices: Computation of the Moore-Penrose Inverse via factorizations, Journal of Applied Mathematics and Computing, DOI: 10.1007/s12190-009-0311-0.
2. N. Matzakos · D. Pappas, 2010, EP matrices: computation of the Moore-Penrose inverse via factorizations, of Applied Mathematics and Computing Vol 34: 113–127.

36) N. P. Karampetakis, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2007, On the computation of the Drazin inverse of a polynomial matrix, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol.26, Issue 1, pp. 1-24.

Η εργασία προτείνει δύο άλγόριθμους για τον υπολογισμό του Drazin αντίστροφου τετράγωνου πολυωνυμικού πίνακα. Ενώ ο πρώτος αλγόριθμος δίνει καλά αποτελέσματα στην περίπτωση που δεν υπάρχουν μεγάλα κενά στις δυνάμεις της μεταβλητής του πολυωνυμικού πίνακα, ο δεύτερος είναι πιο γρήγορος και λιγότερο απαιτητικός σε μνήμη σε διαφορετική περίπτωση. Οι αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν στο Mathematica και έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων ως προς την ταχύτητα. Η μεθοδολογία είναι αυτή που ακολουθήσαμε και στην εργασία [A24] για τον υπολογισμό του αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα.

Citation

1. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.

37) A. C. Pugh, E. N. Antoniou, N. P. Karampetakis, 2007, Equivalence of AR-representations in the light of the impulsive-smooth behaviour, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (Special issue for Polynomial Design Methods, Edited by Michael Sebek and Martin Hromcik), Vol.17, Issue 8, pp. 769-785.

Η εργασία προτείνει ένα νέο είδος ισοδυναμίας, το οποίο ονομάζουμαι *fundamental equivalence*, για μη τετράγωνες AR-περιγραφές συστημάτων π.χ. $A(\rho)\beta(t)=0$ όπου $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{k\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(\rho)}A(\rho)=r$ και $\rho:=d/dt$, το οποίο βασίζεται στον κρουστικό/ομαλό χώρο λύσεων των συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι δύο μη τετράγωνες AR-περιγραφές συστημάτων είναι *fundamental ισοδύναμες* αν-ν διαθέτουν τον ίδιο κρουστικό/ομαλό χώρο λύσεων. Αποδεικνύεται ότι η ισοδυναμία αυτή αποτελεί μια ειδική περίπτωση της unimodular ισοδυναμίας πολυωνυμικών πινάκων η οποία έχει την ιδιότητα να διατηρεί την δομή στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ των πολυωνυμικών πινάκων που περιγράφουν τα δύο συστήματα.

Citations

1. Lomadze V., 2009, Generalised) autoregressive models and their trajectories, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL Volume: 82 Issue: 10 Pages: 1929-1936.
2. Vakhtang Lomadze, Hasan Mahmood, 2010, Smooth/impulsive linear systems: Axiomatic description, Linear Algebra and its Applications 433 (2010) 1997–2009.
3. Fuhrmann, P.A., Helmke, U.b 2011, Equivalence conditions for behaviors and the Kronecker canonical form, Mathematics of Control Signal and Systems, Volume 22, Issue 4, August 2011, Pages 267-293

38) P. Tzekis, N. P. Karampetakis and H. Terzidis, 2007, On the computation of the GCD of 2-D polynomials, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol.17, No.4, pp. 463-470.

Προτείνεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο πολυωνύμων δύο μεταβλητών, με την χρήση τεχνικών DFT.

39) N. P. Karampetakis, 2007, On the solution of the implicit Roesser model, *Bulletin of the Polish Academy of Technical Sciences*, Vol.55, Issue 4, pp. 365-378.

Έστω Σ ένα 2-D διακριτό γραμμικό μοντέλο το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις διαφορών :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix}}_{E}\underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(i,j)}=\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}}_{x(i,j)}+\underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{B}u(i,j)$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ E_3 & 0 \end{bmatrix}}_{E_I}\underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i+1,j) \end{bmatrix}}_{x(i+1,j)}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ 0 & E_4 \end{bmatrix}}_{E_{II}}\underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i,j+1) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix}}_{x(i,j+1)}=\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}}_{x(i,j)}+\underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{B}u(i,j)$$

όπου i,j ακέραιες μεταβλητές, $x(i,j):[0,N]\times[0,M]\to\mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης και $u(i,j):\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου, ενώ

$E_I, E_{II}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται *implicit Roesser model* και αποτελεί ειδική περίπτωση του *generalised singular model*. Μοντέλα όπως αυτό έχουν εφαρμογές στην επεξεργασία εικόνας (image processing) , σε συστήματα ελέγχου επαναληπτικής μάθησης (iterative learning control systems) κ.α..
Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη :
α) Στο πρώτο μέρος προτείνονται συνθήκες μοναδικότητας για το ανάπτυγμα Laurent στο 0 του πίνακα $\left(z_1E_I + z_2E_{II} - A\right)^{-1}$ και ένας αλγόριθμος υπολογισμός του αναπτύγματος αυτού.
β) Στο δεύτερο μέρος προτείνονται δύο κλειστές φόρμουλες :
β1) στην περίπτωση που γνωρίζουμε τις «τελικές» συνοριακές συνθήκες

$$x(i,M) = x_{iM}, i = 0,1,...,N \text{ και } x(N,j) = x_{Nj}, j = 0,1,...,M$$

Την λύση αυτή ονομάζουμε «backward solution" (προς τα πίσω λύση).
β2) στην περίπτωση που γνωρίζουμε σχέση μεταξύ «αρχικών» και «τελικών» συνοριακών συνθηκών της μορφής :

$$C^u_{i,0}x(i,0) + C^u_{i,M}x(i,M) = c^u_i, 0 \le i \le N \text{ και } C^h_{0,j}x(0,j) + C^h_{N,j}x(N,j) = c^h_i, 0 \le j \le M$$

Την λύση αυτή ονομάζουμε «symmetric solution" (συμμετρική λύση).
Επιπλέον προτείνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης των παραπάνω λύσεων. Συνεπώς η εργασία αποτελεί μια γενίκευση της εργασίας [A19] στην περιοχή των 2-D συστημάτων.

40) A.I.G, Vardulakis, N. P. Karampetakis, E. Antoniou and E. Tictopoulou , 2009, On the realization theory of polynomial matrices and the algebraic structure of pure generalized state space systems, *Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Vol. 19, No. 1, 77–88.

Η εργασία πραγματεύεται την θεωρία πραγμάτωσης πολυωνυμικών συναρτήσεων μεταφοράς μέσω συστημάτων στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Ορίζεται η έννοια της μη αναγωγιμότητας στο άπειρο «irreducibility at infinity» μιας τέτοιας πραγμάτωσης και αναλύεται ο μηχανισμός της «απαλειφής» των «συζευγμένων μηδενικών στο άπειρο». Δίνεται η διαφορά μεταξύ των εννοιών της «μη-αναγώγιμης» και της «ελάχιστης» πραγμάτωσης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης μεταφοράς που δεν υπήρχαν έως τώρα στις κανονικά ρητές συναρτήσεις μεταφοράς (proper transfer functions). Μελετώνται επίσης οι έννοιες της «δυναμικής» και «μη-δυναμικής» μεταβλητής σε συστήματα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και δίνεται η σχέση τους με την «ελάχιστη» πραγμάτωση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης μεταφοράς.Τέλος προτείνεται μια μέθοδος υπολογισμού της διάστασης του διανύσματος κατάστασης σε μια «ελάχιστη» πραγμάτωση.

Citations

1. Korotka, T., Loiseau, J.J., Zagalak, P., Kucera, V., 2012, Sufficiency conditions for pole assignment in column-regularizable implicit linear systems, 17th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2012, Article number 6347844, Pages 457-457e
2. Elizabeth. S and Jothilakshmi. R., 2013, Observability and Controllability of MIMO Control Systems via Difference Equations.International Journal of Computer Applications 62(1):37-42, January 2013. Published by Foundation of Computer Science, New York, USA

41) N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, 2009, On the fundamental matrix of the inverse of a polynomial matrix and applications to ARMA representations, Linear Algebra and Its Applications, Vol.431, pp. 2261-2276.

Έστω ο αντιστρέψιμος πολυωνυμικός πίνακας:

$$A(s) = A_0 + A_1s + \cdots + A_qs^q \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$$

με Laurent ανάπτυγμα του $A^{-1}(s)$ στο άπειρο οριζόμενο ως

$$A^{-1}(s) = H_{\hat{q}_r} s^{\hat{q}_r} + H_{\hat{q}_r - 1} s^{\hat{q}_r - 1} + \cdots = \sum_{i=-\hat{q}_r}^{\infty} H_i s^{-i}$$

και ανάπτυγμα στο 0 οριζόμενο ως

$$A^{-1}(s) = N_v s^{-v} + N_{v-1} s^{-v+1} + \cdots = \sum_{i=-v}^{\infty} N_{-i} s^{i}$$

Έστω επίσης οι πίνακες που δημιουργούνται από τους συντελεστές των δυνάμεων του s, του πίνακα $A(s)$

$$E = \begin{bmatrix} A_q & A_{q-1} & \cdots & A_1 \\ 0 & A_q & \cdots & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_q \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q-1} & A_{q-2} & \cdots & A_0 \end{bmatrix}$$

και το ανάπτυγμα στο άπειρο (στο μηδέν αντίστοιχα) του πίνακα $(sE + A)^{-1}$ είναι

$$(sE + A)^{-1} = s^{-1} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-i}, \left((sE + A)^{-1} = \sum_{i=-p}^{\infty} V_{-i} s^{i} \right)$$

Το πρώτο που αποδεικνύεται στην εργασία είναι η σχέση μεταξύ των συντελεστών $H_i(N_i)$ του Laurent αναπτύγματος στο άπειρο (μηδέν) του $A(s)^{-1}$ και των συντελεστών $\Phi_i(V_i)$ του Laurent αναπτύγματος στο άπειρο (μηδέν) του $(sE + A)^{-1}$. Στη συνέχεια προτείνουμε ιδιότητες που ικανοποιούν οι συντελεστές $H_i(N_i)$ του Laurent αναπτύγματος στο άπειρο (μηδέν) του $A(s)^{-1}$ γενικεύοντας αποτελέσματα που αφορούν pencil της μορφής $(sE + A)^{-1}$. Τέλος δίνουμε ως εφαρμογή των αποτελεσμάτων την εύρεση κλειστών φόρμουλων για την λύση (προς τα εμπρός (forward), προς τα πίσω (backward) και συμμετρική (symmetric)) του συστήματος εξισώσεων διαφορών της μορφής

$$\Sigma: \quad A(\sigma) y(k) = B(\sigma) u(k)$$

όπου $\sigma y(k) = y(k+1)$, $A(s) = A_0 + A_1 s + \cdots + A_q s^q \in R[s]^{r \times r}$ με $\det[A(\sigma)] \neq 0$, $B(s) = B_0 + B_1 s + \cdots + B_q s^q \in R[s]^{r \times m}$, $u(k):[0, N] \to \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος, $y(k):[0, N] \to \mathbb{R}^r$ είναι η έξοδος του συστήματος. Η τεχνική που χρησιμοποιούμε είναι η αναγωγή του παραπάνω συστήματος στο ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_q & A_{q-1} & \cdots & A_1 \\ 0 & A_q & \cdots & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_q \end{bmatrix}}_{E} x(k+1) + \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q-1} & A_{q-2} & \cdots & A_0 \end{bmatrix}}_{A} x(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} B_q & \cdots & B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_q & \cdots & B_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & B_q & B_{q-1} & \cdots & B_0 \end{bmatrix}}_{B} v(k)$$

όπου

$$x(k) = \begin{pmatrix} y_{kq+q-1} \\ y_{kq+q-2} \\ \vdots \\ y_{kq} \end{pmatrix}, v(k) = \begin{pmatrix} u_{kq+2q-1} \\ u_{kq+2q-2} \\ \vdots \\ u_{kq} \end{pmatrix}, k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N}{q} \right] - 1$$

του οποίου η λύση είναι γνωστή. Ο τρόπος επίλυσης είναι πολύ πιο άμεσος από αυτόν στην εργασία Α.19, όπου υποθέσαμε την μορφή της λύσης (είχε προκύψει μετά από πάρα πολλές πράξεις).

42) **N.P. Karampetakis, E.N. Antoniou, A.I.G. Vardulakis, and S. Vologiannidis, 2009, Symbolic Computations on Rings of Rational Functions and Applications in Control Engineering, Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2009, Lecture Notes in**

Computer Sciences Vol.5717/2009, Editors : Roberto Moreno –Diaz, Franz Pichler and Alexis Quesada-Arencibia, 12th International Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, February 2009, Revised selected papers, Springer Berlin/Heidelberg 2009, pp.587-594.

Η παρούσα εργασία περιγράφει μια συλλογή συμβολικών αλγορίθμων που έχουν υλοποιηθεί στο περιβάλλον συμβολικής επεξεργασίας Mathematica 7.0 και η οποία είναι άμεσα διαθέσιμη στο Internet. Οι αλγόριθμοι αυτοί χρησιμοποιούνται για τον χειρισμό ρητών συναρτήσεων και την επίλυση προβλημάτων ανάλυσης και σχεδιάσης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου μέσω της αλγεβρο-πολυωνυμικής προσέγγισης. Το πακέτο που δημιουργήθηκε περιέχει όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την χρήση της θεωρίας των Ω-ευσταθών συναρτήσεων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη νέων αλγορίθμων σε συγκεκριμένα προβλήματα ελέγχου.
Επιλεγμένες εργασίες του συνεδρίου, όπως η συγκεκριμένη, οι οποίες έχουν διορθωθεί, δημοσιεύτηκαν στο Lecture Notes in Computer Science, Vol. 5717, Subseries: Theoretical Computer Science and General Issues.

43) **N. P. Karampetakis, 2010, Matrix Pencil Equivalents of Symmetric Polynomial Matrices, Special Issue: Recent Developments in Multidimensional Systems, Control and Signals—Theory and Applications, Asian Journal of Control, Vol.12, No.2.**

Μια καινούργια οικογένεια συνοδεύοντων πινάκων (copmpanion forms) για πολυώνυμα αλλά και πολυωνυμικούς πίνακες έχει παρουσιασθεί στις εργασίες (Fiedler M. 2003 και Antoniou E. and Vologiannidis S., 2004). Η εφαρμογή των ισοδυναμιών αυτών σε πολυωνυμικούς πίνακες με συμμετρίες έχει εξετασθεί στην εργασία (Antoniou E. and Vologiannidis S., 2006). Στην εργασία αυτή επεκτείνουμε τα αποτελέσματα της τελευταίας εργασίας στην περίπτωση πολυωνυμικών πινάκων με δύο μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντος ενός συμμετρικού πολυωνυμικού πίνακα $A(s,z)=\sum_{i=0}^{q_1}\sum_{j=0}^{q_2}A_{i,j}s^iz^j$ με $A_{i,j}=A_{i,j}^T\in\mathbb{R}^{r\times r}$, προτείνουμε έναν νέο συμμετρικό πίνακα $R(s,z)=szE_1+zA_1+sA_2+A_0$ ο οποίος διατηρεί βασικά αναλλοίωτα στοιχεία του πίνακα $A(s,z)$ (αναλλοίωτα πολυώνυμα και τα ιδεώδη που παράγονται από τις $j\times j$ ορίζουσες του πίνακα $A(s,z)$). Τα αποτελέσματα αυτά επεκτείνονται στη συνέχεια σε πολυωνυμικές περιγραφές συστημάτων.

Citations

1. Vologiannidis, S., Antoniou, E.N., 2011, A permuted factors approach for the linearization of polynomial matrices, Mathematics of Control Signal and Systems , Volume 22, Issue 4, August 2011, Pages 317-342
2. Herwig Peters, Nicole Kessissoglou, and Steffen Marburg, 2013, Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction, J. Acoust. Soc. Am. Volume 133, Issue 5, pp. 2668-2677.

44) **Nicholas P. Karampetakis and Alexandros Evripidou, 2012, On the computation of the inverse of a two-variable polynomial matrix by interpolation, Multidim Syst Sign Process, Volume 23, Issue 1-2, pp 97-118, DOI 10.1007/s11045-010-0102-7.**

Το πρόβλημα της αντιστροφής ενός πολυωνυμικού πίνακα με μια ή περισσότερες μεταβλητές παίζει σημαντικό ρόλο στη σύνθεση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου (Antoniou et al. 1989; Antoniou 2001; Kaczorek 1985; Kucera 1979; Vidyasagar 1985;Wolovich 1974), την μελέτη πολυδιάστατων φίλτρων με εφαρμογές στην επεξεργασία εικόνας, στα ηλεκτρικά δίκτυα με μεταβλητά στοιχεία, στην αντιστροφή καναλιών MIMO-OFDM zero-forcing receivers (Borgmann and Bolcskei 2004), και πρόσφατα στην πολυδιάστατη συνέλιξη κωδίκων (Lobo et al. 2006). Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε δύο μεθόδους παρεμβολής για την αντιστροφή ενός πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών. Ο πρώτος αλγόριθμος, που γενικεύει τον αλγόριθμο των Schuster and Hippe (1992), βασίζεται στην μέθοδο παρεμβολής Lagrange δύο μεταβλητών, η οποία στηρίζεται στις τιμές της ορίζουσας και του προσαρτημένου πολυωνυμικού πίνακα σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων. Το κύριο μειονέκτημα του αλγορίθμου αυτού είναι ότι βασίζεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με μεγάλο πλήθος αγνώστων. Ο δεύτερος αλγόριθμος, που γενικεύει τον αλγόριθμο των Paccagnella Luisa and Pierobon Gianfranco (1976), στηρίζεται στην τεχνική του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier ή καλύτερα στον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier που είναι πολύ αποδοτικοί αλγόριθμοι και είναι διαθέσιμοι και σε λογισμικό (software) αλλά και σε υλικό (hardware) και οι οποίοι επωφελούνται του παράλληλου περιβάλοντος επεξεργασίας. Οι δύο αλγόριθμοι έχουν μελετηθεί ως προς την πολυπλοκότητα τους και έχουν υλοποιηθεί σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Ο δεύτερος αλγόριθμος υπερτερεί σε σχέση με τον πρώτο ως προς την πολυπλοκότητα. Μια επίσης σημαντική διαφορά των δύο αλγορίθμων είναι ότι ο πρώτος χρησιμοποιεί πραγματικά ζεύγη αριθμών ως σημεία παρεμβολής σε αντίθεση με τον δεύτερο που χρησιμοποιεί μιγαδικά ζεύγη σημείων. Ο αλγόριθμος DFT έχει υλοποιηθεί στο Mathematica και έχει συγκριθεί με τους υπάρχοντες αλγορίθμους στο Mathematica.

45) 2012, Multidimensional Systems and Signal Processing. Guest Editorial : Special Issue on : Advances in multidimensional systems and signal processing Guest Editors : Nicholas P. Karampetakis and Krszystof Galkowski, Vol.23, pp.1–3.

Η ειδική αυτή έκδοση είναι αφιερωμένη στην μνήμη του Professor Nirmal K. Bose, Past Editor in Chief του περιοδικού Multidimensional Systems and Signal Processing (MSSP), για την συνεισφορά του στην περιοχή των πολυδιάστατων συστημάτων (Multidimensional Systems). Ήταν μάλιστα αυτός που υποστήριξε την ιδέα της δημιουργίας αυτής της ειδικής έκδοσης.

Στόχος της ειδικής αυτής έκδοσης του περιοδικού είναι να παρουσιάσει τις σύγχρονες εξελίξεις στην περιοχή των πολυδιάστατων συστημάτων (Multidimensional systems), των επαναληπτικών διαδικασιών (Repetitive processes) και στην πολυδιάστατη επεξεργασία σήματος (Multidimensional signal processing), τόσο ως προς το θεωρητικό κομμάτι όσο και ως προς τις πρακτικές εφαρμογές.

46) Dimitris N. Varsamis and Nicholas P. Karampetakis, 2012, On the Newton bivariate polynomial interpolation with applications, Multidim Syst Sign Process, DOI: 10.1007/s11045-012-0198-z.

Η εργασία αυτή παρέχει μια καλύτερη εικόνα της μεθόδου παρεμβολής Newton στην περίπτωση συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα προτείνει έναν αναδρομικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πολυωνύμου παρεμβολής Newton μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Στη συνέχεια προτείνει έναν δεύτερο αναδρομικό αλγόριθμο διηρημένων διαφορών (divided differences) για τον υπολογισμό των συντελεστών του πολυωνύμου Newton. Η προτεινόμενη φόρμουλα είναι παρόμοια με αυτή του Neidinger (2009) όταν χρησιμοποιείται τριγωνική βάση για τα σημεία παρεμβολής, αλλά όχι ακριβώς ίδια. Στη συνέχεια μελετούμε την ειδική περίπτωση που γνωρίζουμε εκ των προτέρων ένα άνω φράγμα του βαθμού ως προς κάθε μεταβλητή για το πολυώνυμο παρεμβολής, μια περίπτωση που συναντάμε όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών. Τέλος γίνεται μια μελέτη της πολυπλοκότητας των προτεινόμενων αλγορίθμων και δίνεται μια εφαρμογή τους στον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πολυωνυμικού πίνακα γενικεύοντας έτσι τα αποτελέσματα των Paccagnella and Pierobon (1976) και Schuster and Hippe (1992). Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι μπορούν εύκολα να επεκταθούν και σε συναρτήσεις με περισσότερες μεταβλητές καθώς και να εφαρμοστούν στον υπολογισμό : α) της συνάρτησης μεταφοράς ενός πολυδιάστατου γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου, πολυμεταβλητού συστήματος, β) της λύσης μιας πολυωνυμικής διοφαντικής εξίσωσης, γ) του γενικευμένου αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών.

Citations

1. Xia, Likun and Hussin, Fawnizu Azmadi and Malik, Aamir Saeed (2012) *A Novel Algorithm for Automated Model Generation of Analog Circuits Using Chebyshev-Newton Interpolation.* In: International Conference on Advanced Electrical Engineering (ICAEE), Aug. 29-30, 2012, Hong Kong, China.

47) Nicholas P. Karampetakis, 2012, Construction of Algebraic-Differential Equations with given Smooth and Impulsive Behavior, to appear in IMA Journal of Mathematical Control and Information.

Θεωρείστε ένα σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής $A(\rho)\beta(t)=0$ όπου $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$, $rank_{\mathbb{R}(\rho)}A(\rho)=r$ και $\rho:=d/dt$ (AR-representation). Ο ομαλός χώρος λύσεων (smooth solution space) βασίζεται στην πεπερασμένη δομή του πολυωνυμικού πίνακα $A(\rho)$ (Gohberg, I.; Lancaster, P.; Rodman, L, 1982). Αντίστοιχα ο κρουστικός χώρος λύσεων του συστήματος βασίζεται στην δομή στο άπειρο του πολυωνυμικού πίνακα $A(\rho)$ (A.I.G. Vardulakis, 1991), το οποίο βασίζεται στον κρουστικό/ομαλό χώρο λύσεων των συστημάτων.

Την εργασία αυτή μελετούμε το *αντίστροφο πρόβλημα*. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος της εργασίας, μελετούμε το συγκεκριμένο πρόβλημα : Δοθέντος συγκεκριμένου κρουστικού χώρου λύσεων, προσπαθούμε να υπολογίσουμε τον ελαχίστου βαθμού πολυωνυμικό πίνακα $A(\rho)$ ο οποίος είναι τέτοιος ώστε το σύστημα $A(\rho)\beta(t)=0$ να έχει ακριβώς τον συγκεκριμένο ***κρουστικό χώρο*** λύσεων, γενικεύοντας έτσι τα αποτελέσματα του (Gohberg, I.; Lancaster, P.; Rodman, L, 1982) που αφορούν τον ομαλό χώρο λύσεων. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας προχωρούμε ακόμα περισσότερο, υπολογίζοντας τον ελαχίστου βαθμού πολυωνυμικό πίνακα $A(\rho)$ ο οποίος είναι τέτοιος ώστε το σύστημα $A(\rho)\beta(t)=0$ να έχει συγκεκριμένο ***ομαλό και κρουστικό*** χώρο λύσεων.

48) Nicholas P. Karampetakis and Anastasia Gregoriadou, 2013, Reachability and Controllability of Discrete Time Descriptor Systems, to appear in the International Journal of Control.

Σε αντίθεση με τα διακριτά συστήματα στον χώρο των καταστάσεων, τα ιδιόμορφα διακριτά συστήματα της μορφής $Ex(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$: α) μπορεί να μην έχουν λύσεις λόγω μη-συμβατών αρχικών συνθηκών, και β) είναι μη αιτιατά λόγω του ότι τιμή της κατάστασης $x(k)$ εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου $u(k+i)$, όπως για παράδειγμα στο Leontief μοντέλο.

Η έννοια των συμβατών αρχικών συνθηκών έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (Brull 2009), (Campbel 1980), (Dai 1989), (Lewis and Mertzios 1990), (Stykel 2002). Στην παρούσα εργασία εκφράζουμε τον χώρο των συμβατών αρχικών συνθηκών σε σχέση με τις τον θεμελιώφη πίνακα $\Phi_i(E,A)$ του αναπτύγματος Laurent στο άπειρο του $(sE-A)^{-1}$. Στα συνεχή συστήματα ορίζουμε ως συμβατές αρχικές συνθήκες, τις αρχικές συνθήκες που δεν οδηγούν σε κρουστικές λύσεις. Οι αρχικές συνθήκες ορίζονται ως συμβατές στην περίπτωση που ικανοποιούν το σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων $Ex(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$.

Στην παρούσα εργασία, οι συμβατές αρχικές συνθήκες, παίζουν ουσιαστικό ρόλο στους πρώτους όρους της ακολουθίας εισόδου που θα εφαρμόσουμε στο σύστημα, λόγω του ότι η κατάσταση $x(0)$ εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους (μη αιτιατό). Παρόλο που οι συμβατές αρχικές συνθήκες έχουν μελετηθεί από πολλούς επιστήμονες, δεν δόθηκε η πρέπουσα σημασία σ'αυτές κατά την διάρκεια της μελέτης της ελεγξιμότητας ενός συστήματος. Για παράδειγμα, βάσει των προτεινόμεων λύσεων που δόθηκαν έως σήμερα, είναι δυνατό η προτεινόμενη ακολουθία εισόδων που θα μεταφέρει ένα σύστημα από μια οποιαδήποτε αρχική κατάσταση x_0 σε μια οποιαδήποτε τελική κατάσταση x_f , να μην ικανοποιεί τις συμβατές αρχικές συνθήκες. Παρόλα αυτά τα κριτήρια εφικτότητας που έχουν προταθεί ως τώρα είναι σωστά όπως αποδεικνύεται κατασκευαστικά στην εργασία αυτή. Είναι γνωστό από την υπάρχουσα βιβλιογραφία (Antsaklis 2006), (Kailath 1980), ότι ο χώρος των εφικτών/ελέγξιμων καταστάσεων ενός συστήματος στον χώρο των καταστάσεων παράγεται από τις στήλες ενός πίνακα Grammian (reachability/controllability Grammian). Μια επέκταση των reachability (causal and non-causal) Grammians στα ιδιόμορφα διακριτά συστήματα παρουσιάστηκε στον (Bender 1987), όπου δόθηκε η σύνδεση με τις εξισώσεις Lyapunov. Παρόλο που δόθηκε μια σύντομη αναφορά στην εργασία αυτή για τον χώρο των εφικτών καταστάσεων (στηριζόμενος στην εργασία του (Lewis 1985)), δεν έγινε καμία αναφορά στον χώρο των συμβατών αρχικών συνθηκών. Επίσης δεν προτάθηκε η ακολουθία εισόδων που θα οδηγήσει το σύστημα από μια οποιαδήποτε αρχική κατάσταση x_0 σε μια οποιαδήποτε τελική κατάσταση x_f. Παρόλο που έχει γίνει συζήτηση για τις συμβατές αρχικές συνθήκες στην εργασία (Lewis 1985), δεν λήφθηκαν υπόψιν στην απόδειξη για την εφικτότητα του συστήματος. Μια παρόμοια προσέγγιση έγινε στην εργασία (Kaczorek 2002). Σκοπός της εργασίας είναι να μελετήσει διεξοδικά τις έννοιες της εφικτότητας ενός ιδιόμορφου συστήματος προτείνοντας την ακολουθία επιτρεπτών εισόδων που θα οδηγήσει το σύστημα από μια οποιαδήποτε αρχική κατάσταση x_0 σε μια οποιαδήποτε τελική κατάσταση x_f. Προτείνονται επίσης κριτήρια εφικτότητας που βασίζονται στους αιτιατούς/μη-αιτιατούς πίνακες Grammian. Επίσης γίνεται μελέτη της έννοιας της ελεγξιμότητας για πρώτη φορά.

49) Dimitris Varsamis, Nicholas Karampetakis and Paris Mastorocostas, 2013, An optimal bivariate polynomial interpolation basis for the application of the evaluation-interpolation technique, Appl. Math. Inf. Sci., http://dx.doi.org/10.12785/amis/Va_Ka_amis.

Υπάρχουν περιπτώσεις πολυωνυμικής παρεμβολής Newton δύο μεταβλητών, στα οποία γνωρίζουμε εκ των προτέρων ένα άνω φράγμα του βαθμού *n* του πολυωνύμου παρεμβολής $p(x,y)$ καθώς και της κάθε μεταβλητής του (k_1 ως προς x και k_2 ως προς *y*). Στην εργασία αυτή δείχνουμε, ότι στις περιπτώσεις αυτές είναι λιγότερο δαπανηρό ως προς την μνήμη αλλά και το υπολογιστικό κόστος, να χρησιμοποιήσουμε μια συγκεκριμένη βάση σημείων παρεμβολής (πολυγωνική), η οποία συνδυάζει την τριγωνική και την ορθογώνια βάση. Αυτή η νέα πολυγωνική βάση, χρησιμοποιεί λιγότερα σημεία παρεμβολής και κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες ταυτίζεται είτε με την τριγωνική βάση (k1 +k2 = 2 • n) είτε με την ορθογώνια βάση (k1 + k2 = n). Η προτεινόμενη πολυγωνική βάση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές εφαρμογές όπως για παράδειγμα : α) τον υπολογισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο πολυωνύμων (δύο μεταβλητών), β) την ορίζουσα ενός πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών κάνοντας χρήση της μεθόδου παρεμβολής Newton που προτάθηκε στην εργασία [A46]. Παρόλο που στην εργασία αυτή η συνάρτηση $p(x,y)$ που θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι ήδη πολυώνυμο, η πολυγωνική βάση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση, αν το πολυώνυμο παρεμβολής ικανοποιεί παρόμοιες ιδιότητες.

50) Nicholas P. Karampetakis and Karamichalis Rallis, 2013, Discretization of Singular Systems and Error Estimation, to appear in the International Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS).

Η παρούσα εργασία προτείνει μια μέθοδο διακριτοποίησης πρώτου βαθμού (triangular first order hold (interpolating FOH)) για ιδιόμορφα συστήματα της μορφής $E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$, γενικεύοντας τα αποτελέσματα τα οποία δίνονται στην εργασία (Karageorgos et.al. 2010). Στη συνέχεια προτείνεται ένα πάνω φράγμα για την απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της συνεχούς λύσης και της διακριτής λύσης. Η εργασία είναι γραμμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να επιλύει και το πρόβλημα της διακριτοποίησης μηδενικού βαθμού.

Β. Εργασίες δημοσιευμένες σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων

1) Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1991, Polynomial matrices and equivalent singular pencils., Proceedings of the *Workshop on Singular Systems*, organized by Prof. N. Karcanias, City University, December 1991.

Θεωρείστε έναν πολυωνυμικό πίνακα $T(s)$:

$$T(s) = T_0 + T_1 s + \cdots + T_q s^q \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

Δύο ενδιαφέροντα προβλήματα που επιλύονται στην παρούσα εργασία είναι τα εξής :

1) Η εύρεση πινάκων $E, A \in \mathbb{R}^{\lambda_1\times\lambda_2}$ τέτοιοι ώστε οι πίνακες $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και $sE - A \in \mathbb{R}[s]^{\lambda_1\times\lambda_2}$ να έχουν :

α) την ίδια μηδενική δομή στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$,

β) τους ίδιους δεξιά και αριστερά ελάχιστους δείκτες.

2) Ο προσδιορισμός τετράγωνων και αντιστρέψιμων πινάκων (unimodular matrices) $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{\lambda_1\times\lambda_1}$ ($\det M(s) = c_1 \in \mathbb{R}-\{0\}$) και $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{\lambda_2\times\lambda_2}$ ($\det N(s) = c_2 \in \mathbb{R}-\{0\}$) :

$$sE - A = M(s)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & T(s) \end{pmatrix} N(s)$$

όπου $r + p = \lambda_1, r + m = \lambda_2$ και $sE - A$ είναι ένας πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας στην Kronecker κανονική μορφή που ικανοποιεί τα (α) και (β).

Η επίλυση του προβλήματος αυτού αποτελεί γενίκευση των γνωστών γραμμικοποιήσεων των Weierstrass για τετράγωνους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες με ορίζουσα διάφορη του μηδενός π.χ. $T(s) = sE - A \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με $\det(sE - A) \neq 0$, και Kronecker για ιδιόμορφους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες πρδ. $T(s) = sE - A \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ με $\det(sE - A) = 0$ ή $T(s) = sE - A \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ με $p \neq m$.

Για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων προτείνονται δύο διαφορετικές μέθοδοι γραμμικοποιήσεως.

2) Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1992, Equivalence Transformations of Rational Matrices., Proceedings of the 2nd *IFAC Workshop on Systems Structure and Control*, Prague 3-5 September 1992, Pergamon Press, pp.40-43.

Η εργασία αυτή αποτελεί την πρώτη έκδοση της εργασίας Α.2 που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα και έχει ως σκοπό να παρουσιάσει την Ω-ισοδυναμία ρητών πινάκων χωρίς να εμπλεχτεί σε τυχόν εφαρμογές της ισοδυναμίας αυτής στην Γραμμική Θεωρία Συστημάτων.

Η προτεινόμενη Ω-ισοδυναμία ρητών πινάκων αποτελεί μια γενίκευση των γνωστών ισοδυναμιών : γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (extended unimodular equivalence (Pugh & Shelton 1978)), γενικευμένη ρητή ισοδυναμία (extended causal equivalence (Walker 1988)) και πλήρη ισοδυναμία (full equivalence (Hayton et al 1988)).

3) Karampetakis N.P., Pugh A.C., Hayton G.E. and Vardulakis A.I.G., 1992, On a fundamental notion of equivalence in Linear System Theory., Proceedings of the 2[nd] *IFAC Workshop on Systems Structure & Control*, Prague 3-5 September 1992, PERGAMON PRESS, pp.356-359.

Στην εργασία αυτή προτείνουμε ένα καινούργιο είδος ισοδυναμίας μεταξύ ομογενών γραμμικών συστημάτων που αποτελούνται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, όπως φαίνεται παρακάτω :
Θεωρείστε δύο γραμμικά ομογενή συστήματα $\Sigma_i, i = 1,2$, συνηθών αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$T_i(\rho)\xi_i(t) = 0, i = 1,2$$

όπου $\rho := d/dt$, $T_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ και $\det T_i(\rho) \neq 0$. Τα $\Sigma_i, i = 1,2$ θα θεωρούνται θεμελιώδη *ισοδύναμα* (*fundamentallly equivalent*) εάν-ν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" χώρων λύσεων των δύο συστημάτων της μορφής :

$$\xi_2(t) = N(\rho)\xi_1(t) \tag{2}$$

Ένα πρώτο πρόβλημα που παρουσιάζεται στον παραπάνω ορισμό είναι ότι η σχέση (2) δεν είναι πάντα απεικόνιση. Αποδεικνύουμε ότι η σχέση (2) είναι απεικόνιση εάν-ν ισχύει η παρακάτω McMillan συνθήκη :

$$\delta_M\begin{pmatrix} T_1(\rho) \\ N(\rho) \end{pmatrix} = \delta_M(T_1(\rho)) \tag{3}$$

Ένα δεύτερο πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι το εξής : ενώ ξέρουμε (Pernebo 1977) ότι η σχέση (2) είναι ισομορφισμός, όσον αφορά τις "πεπερασμένες" λύσεις του συστήματος Σ_1, όταν ο πίνακας $\begin{pmatrix} T_1(\rho) \\ N(\rho) \end{pmatrix}$ δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά, δεν ξέρουμε τι γίνεται όσον αφορά τις "κρουστικές" λύσεις του συστήματος Σ_1. Ερχόμαστε λοιπόν και αποδεικνύουμε ότι η σχέση (2) είναι ισομορφισμός όσον αφορά τις "πεπερασμένες" αλλά και τις "κρουστικές" λύσεις του Σ_1 εάν-ν α) ικανοποιείται η σχέση (3) και β) ο πίνακας $\begin{pmatrix} T_1(\rho) \\ N(\rho) \end{pmatrix}$ δεν περιέχει πεπερασμένα μηδενικά καθώς και μηδενικά στο $s = \{\infty\}$.

Στην συνέχεια ερχόμαστε και αποδεικνύουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει η *θεμελιώδης ισοδυναμία*, στο σύνολο των τετράγωνων πολυωνυμικών πινάκων με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, ταυτίζεται με τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει η *πλήρης ισοδυναμία* πολυωνυμικών πινάκων (full equivalence (Hayton et al 1988)) στην ίδια κατηγορία πινάκων.

Η προτεινόμενη θεμελιώδης ισοδυναμία αποτελεί μια γενίκευση της θεμελιώδους ισοδυναμίας που προτάθηκε από τον Pernebo (1977).

Citations
1. Mahmood S., 1996, *Some Structural Problems Arising in the Generalized Theory of Linear Multivariable Control Systems*, Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.

4) Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E. and Vardulakis A.I.G., 1992, Interpretation of a certain McMillan degree condition appearing in Control., Proceedings of the 6[th] *IMA Conference on Control : Modelling, Computation, Information*, U.M.I.S.T., 2-4 September 1992.

Η παρούσα εργασία ταυτίζεται με την εργασία Α.6.

5) Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, On the solution space of singular state-space AR-representations., Proceedings of the *International Symposium on Implicit and Nonlinear Systems*, pp.191-196, 14-15 December 1992, Fort Worth, Texas.

Θεωρείστε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από αλγεβρικές και συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1ου βαθμού :

$$\Sigma : E\dot{x}(t) = Ax(t)$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)}(sE-A) = r \le \min(p,m)$ και $x(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^m$ είναι μια m-διάστατη συνάρτηση. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει :

1) Τον χώρο λύσεων του παραπάνω συστήματος.
2) Μια κλειστή φόρμουλα για την λύση του παραπάνω συστήματος.

γενικεύοντας τα αποτελέσματα της περίπτωσης όπου οι πίνακες Ε και Α είναι τετράγωνοι και $\det(sE-A) \ne 0$, τα οποία παρουσιάστηκαν από τους Gantmacher (1959), Rosenbrock (1970), Kailath (1980), Verghese (1978), Cohberg et. al. (1982), Vardulakis (1991).

Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι η μηδενική δομή στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ καθώς και ο δεξιά μηδενικός χώρος του πίνακα $sE-A$ συμβάλλουν στην δημιουργία του χώρου λύσεων του παραπάνω συστήματος. Τα χαρακτηριστικά δε του χώρου λύσεων του παραπάνω συστήματος είναι **α)** ότι δεν αποτελείται από συγκεκριμένες *m*-διάστατες συναρτήσεις αλλά από κλάσεις ισοδυναμίας που παράγουν συγκεκριμένες *m*-διάστατες συναρτήσεις και **β)** ότι η διάσταση του χώρου λύσεων είναι ίση με $f=n+q+\varepsilon$ όπου n={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $\mathbb{C}$ του πίνακα $sE-A$ συμπεριλαμβανομένης και της τάξης}, q={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $s=\{\infty\}$ του πίνακα $sE-A$ συμπεριλαμβανομένης και της τάξης} και ε={το πλήθος των δεξιά ελαχίστων δεικτών του πίνακα $sE-A$ συμπεριλαμβανομένης και της τάξης}. Η συμβολή του αριστερά μηδενικού χώρου του πίνακα $sE-A$ είναι στο να παράγει ένα σύνολο παραδεκτών αρχικών συνθηκών κάτω από τις οποίες το σύστημα μου έχει λύση. Παρατηρούμε δηλαδή ότι τα αναλλοίωτα στοιχεία του πίνακα $sE-A$ π.χ. μηδενική δομή στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ και δεξιά και αριστερά μηδενικός χώρος, συμβάλλουν χαρακτηριστικά στην δημιουργία του χώρου λύσεων του παραπάνω συστήματος.
Στην συνέχεια δίνουμε μια κλειστή φόρμουλα για την εύρεση της λύσης του παραπάνω συστήματος κάτω απο συγκεκριμένες "παραδεκτές" αρχικές συνθήκες.

6) Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E. and Vardulakis A.I.G., 1992, A fundamental notion of equivalence for Linear Multivariable Systems., Proceedings of the *31rst IEEE Conference on Decision and Control*, pp.151-156, Vol.1, Tuscon, Arizona, Dec. 1992.

Η παρούσα εργασία αποτελεί την πρώτη έκδοση της εργασίας Α.3. Κύριος σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει δύο καινούργια είδη ισοδυναμίας γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων, στο πεδίο του χρόνου : την *θεμελιώδη ισοδυναμία συστημάτων* (*fundamental equivalence*) και την *γενικευμένη θεμελιώδη ισοδυναμία συστημάτων* (*extended fundamental equivalence*) η οποία δεν παρουσιάστηκε στην εργασία Α.3.

Σύμφωνα με την έννοια της *θεμελιώδους ισοδυναμίας*, δύο γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, πολυμεταβλητά συστήματα Σ_1 και Σ_2 θα θεωρούνται *θεμελιώδη ισοδύναμα* εαν-ν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των πεπερασμένων αλλά και κρουστικών χώρων λύσεων-εισόδων των δύο συστημάτων.

Σύμφωνα δε με την έννοια της *γενικευμένης θεμελιώδους ισοδυναμίας*, δύο γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, πολυμεταβλητά συστήματα Σ_1 και Σ_2 θα θεωρούνται *γενικευμένα θεμελιώδη ισοδύναμα* εάν-ν υπάρχει α) ένας μονομορφισμός μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace των πεπερασμένων αλλά και κρουστικών χώρων λύσεων-εισόδων των δύο συστημάτων και β) ένας επιμορφισμός μεταξύ των αρχικών συνθηκών-εξόδων των δύο συστημάτων.

Οι δύο αυτοί ορισμοί θεμελιώδους ισοδυναμίας συστημάτων, όπως αποδεικνύεται, ταυτίζονται μεταξύ τους και αποτελούν μια γεωμετρική ερμηνεία της *πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων* (*full system equivalence*) (Hayton et al 1990) στο πεδίο του χρόνου.

Οι δύο προτεινόμενες έννοιες θεμελιώδους ισοδυναμίας συστημάτων αποτελούν την γενίκευση α) της θεμελιώδους ισοδυναμίας συστημάτων, που προτάθηκε από τον Pernebo (1977), και αφορούσε την "πεπερασμένη" συμπεριφορά των συστημάτων αυτών και β) της θεμελιώδους ισοδυναμίας γενικευμένων ιδιόμορφων συστημάτων (generalized state space systems), που προτάθηκε από τους Hayton et al (1986) και αφορούσε την "πεπερασμένη" και "κρουστική" συμπεριφορά των συστημάτων αυτών.

7) Karampetakis N.P., Mertzios B.G. and Vardulakis A.I.G., 1993, Generalized models of 2-D linear discrete systems and computation of its transfer function matrix., Proceedings of the 2nd *European Control Conference*, pp. 1490-1494, June 28-July 1, 1993, Groningen, The Netherlands.

Η παρούσα εργασία αποτελεί την πρώτη έκδοση της εργασίας Α.4 που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Κύριος σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει ένα γενικευμένο μοντέλο δισδιάστατων συστημάτων (2-D Systems) και στην συνέχεια να προτείνει έναν επαναληπτικό αλγόριθμο υπολογισμού της συνάρτησης μεταφοράς του καινούργιου αυτού μοντέλου. Η διαφορά της με την εργασία Α.4 της προηγούμενης ενότητας έγκειται στο ότι δεν παρουσιάζει τον επιπλέον επαναληπτικό αλγόριθμο υπολογισμού της Laurent ανάπτυξης της συνάρτησης μεταφοράς του καινούργιου αυτού μοντέλου. Εφαρμογές της παραπάνω εργασίας μπορούμε να έχουμε στην ανάλυση, σύνθεση και σχεδίαση δισδιάστατων συστημάτων.

Το γενικευμένο μοντέλο το οποίο προτάθηκε στην εργασία αυτή αποτελεί μια γενίκευση των γνωστών μοντέλων του Roesser (1975), Attassi (1975), Fornasini-Marchesini (1978), J.Kurek (1985) και T.Kaczorek (1988). Ο προτεινόμενος επαναληπτικός αλγόριθμος για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς του μοντέλου αυτού αποτελεί γενίκευση των αλγορίθμων που προτάθηκαν από τους Mertzios & Paraskevopoulos (1981), Mertzios (1986), Mertzios & Lewis (1988).

8) Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the behavior of discrete-time AR-Representations., Proceedings of the 1st *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory*, June 21- June 23, 1993, Chania, Crete, GREECE.

Θεωρείστε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από αλγεβρικές και συνήθεις εξισώσεις διαφορών :

$$\Sigma: \quad R(\sigma)w(t)=0$$

όπου $\sigma w(t)=w(t+1)$ είναι ο τελεστής μετατόπισης, $R(\sigma)\in\mathbb{R}[\sigma]^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(\sigma)}R(\sigma)=r\leq\min(p,m)$ και $w(t):\mathbb{Z}^{+}\rightarrow\mathbb{R}^{m}$ είναι μια *m*-διάστατη συνάρτηση. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει τον χώρο λύσεων του παραπάνω συστήματος. Όπως αποδεικνύουμε ο χώρος λύσεων του παραπάνω συστήματος είναι στενά συνδεδεμένος με την αλγεβρική δομή του πίνακα $R(\sigma)$. Αποδεικνύουμε ότι α) ο χώρος λύσεων αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας αντί συγκεκριμένων *m*-διάστατων συναρτήσεων και β) ότι η διάσταση του χώρου λύσεων είναι ίση με $f=n+\varepsilon$ όπου n={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $\mathbb{C}$ του πίνακα $R(\sigma)$ συμπεριλαμβανομένης και της τάξης}, και ε={το πλήθος των δεξιά ελαχίστων δεικτών του πίνακα $R(\sigma)$ συμπεριλαμβανομένης και της τάξης}. Η συμβολή της μηδενικής δομής στο $s=\{\infty\}$ του πίνακα $R(\sigma)$ καθώς και της αριστεράς μηδενικής δομής του είναι στο να παράγει ένα σύνολο παραδεκτών αρχικών συνθηκών κάτω από τις οποίες το σύστημα μου έχει λύση. Αλγόριθμοι για την δημιουργία του χώρου λύσεων και του συνόλου των παραδεκτών αρχικών συνθηκών δίνονται στην εργασία αυτή.

9) Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1993, Structural properties of square inverse linear systems., Proceedings of the 1st *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory,* June 21-23, 1993, Chania. Crete, GREECE.

Η παρούσα εργασία ταυτίζεται με την εργασία Α.7 της προηγούμενης ενότητας.

10) Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the behavior of continuous-time AR-Representations., Proceedings of the *Second European Control Conference*, pp.1784-1789, June 28- July 1, 1993, Groningen, The Netherlands.

Θεωρείστε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από αλγεβρικές και συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οποιοδήποτε βαθμού :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t)=0$$

όπου $\rho:=d/dt$, $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(\sigma)}A(\sigma)=r\leq\min(p,m)$ και $\beta(t):[0-,+\infty)\to\mathbb{R}^m$ είναι μια m-διάστατη συνάρτηση. Στην περίπτωση όπου $r=p=m$ και $\det A(\rho)\neq 0$ ο χώρος λύσεων του παραπάνω συστήματος έχει μελετηθεί από τους Gantmacher (1959), Rosenbrock (1970), Kailath (1980), Verghese (1978), Cohberg et. al. (1982), Vardulakis (1991). Στην περίπτωση τώρα που α) $r=p=m$ και $\det A(\rho)=0$, ή β) $p\neq m$ ο χώρος λύσεων του παραπάνω συστήματος μελετάται στην συγκεκριμένη εργασία.

Citations
1. Mahmood S., 1996, *Some Structural Problems Arising in the Generalized Theory of Linear Multivariable Control Systems*, Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.
2. Henri Bourles, 2003, Impulsive behaviours of discrete and continuous time varying systems: A unified approach, ECC'03.
3. Henri Bourles, 2004, Impulsive systems and behaviors in the theory of linear dynamical systems, Forum Mathematicum.
4. Lomadze V., 2009, Generalised) autoregressive models and their trajectories, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL Volume: 82 Issue: 10 Pages: 1929-1936.

11) Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1993, An extension of Wolovich's definition of equivalence of Linear Systems., Proceedings of the 32nd *IEEE Conference on Decision & Control* , San Antonio, TX, 15-17 December 1993, pp.2389-2394.

Η παρούσα εργασία ταυτίζεται με την εργασία Α.8 της προηγούμενης ενότητας.

12) Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1994, Observations on the notion of minimality in the generalized state-space., Proceedings of the 2nd *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory and Applications*, pp.592-599, June 19-22, 1994, Chania, Crete, CREECE.

Η έννοια της ελάχιστης πραγμάτωσης στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων μιας συνάρτησης μεταφοράς $G(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ μελετάται στην παρούσα εργασία.

Ενώ η απλή έννοια του *ελάχιστου* στην συμβατική θεωρία στον χώρο των καταστάσεων ταυτίζεται με την ελεγξιμότητα και παρατηρισιμότητα, στην γενικευμένη θεωρία συστημάτων συναντούμε δύο διαφορετικές έννοιες του "ελάχιστου" :

α) την λεγόμενη *ισχυρή μη αναγωγιμότητα* (strongly irreducibility) που ταυτίζεται με την ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα στην γενική έννοια,
και
β) την έννοια του *ελάχιστου* που ταυτίζεται με την ελάχιστη διάσταση του διανύσματος του χώρου των καταστάσεων από όλες τις πραγματώσεις με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$.

Και η ισχυρή μη αναγωγιμότητα και η ελαχιστότητα είναι έννοιες που εφαρμόζονται στην ελάχιστη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων μιας συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$. Η διάσταση του διανύσματος του χώρου των καταστάσεων που αντιστοιχεί σε μια ελάχιστη πραγμάτωση μιας συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ ονομάζεται *γενικευμένη ελάχιστη διάσταση* και αποτελεί ένα αναλλοίωτο στοιχείο της $G(s)$ όπως αποδεικνύεται βάσει συγκεκριμένου αλγορίθμου που υπολογίζει την διάσταση αυτή. Ο βασικός μετασχηματισμός που συνδέει όλες τις ισχυρά μη αναγώγιμες πραγματώσεις μιας συγκεκριμένης συνάρτησης μεταφοράς είναι η τέλεια ισοδυναμία συστημάτων (completely system equivalence) ενώ μια ειδική μορφή του ίδιου μετασχηματισμού συνδέει όλες τις ελάχιστες πραγματώσεις.

Η έννοια της ελαχιστότητας είναι αρκετά ελκυστική, λόγω του ότι εκτός από τις έννοιες της ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας που εμπεριέχει (ιδιότητες της ισχυρά μη αναγωγιμότητας), περιέχει και την επιπλέον ιδιότητα ότι αναπαριστά την πραγμάτωση με τον ελάχιστο αριθμό καταστάσεων και εξισώσεων του συστήματος. Παρατηρούμε τέλος ότι ενώ η ισχυρή μη αναγωγιμότητα ενός συστήματος στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων παραμένει σταθερή κάτω από σταθερή ανάδραση εξόδου το ίδιο δεν συμβαίνει με την ελαχιστότητα του ίδιου συστήματος. Επίσης η γενικευμένη ελάχιστη διάσταση δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από σταθερή ανάδραση εξόδου σε αντίθεση με τον McMillan βαθμό της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Οι παραπάνω παρατηρήσεις μας αποδεικνύουν ότι η ισχυρή μη αναγωγιμότητα διακατέχεται από μια δυναμικότητα σε αντίθεση με την ελαχιστότητα ενός συστήματος.

Citations

1. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

13) Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1994, Generalized state-space representations for Linear Multivariable Systems., Proceedings of the 2^{nd} *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory and Applications*, pp.209-216, June 19-22, 1994, Chania, Crete, GREECE.

Πρόκειται για περίληψη της εργασίας Α.9.

14) Karampetakis N.P., Pugh A.C., and Hayton G.E., 1995, Notes on a hierarchical theory of systems., Proceedings of the 3^{rd} *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory and Applications,* pp.135-142, Limassol, Cyprus, July 11-13, 1995.

Η παρούσα εργασία ταυτίζεται με την εργασία Α.14.

15) Karampetakis N.P., and Vardulakis A.I., 1995, On the solution of ARMA-representations., Proceedings of the 3^{rd} *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory and Applications,* pp.156-163, Limassol, Cyprus, July 11-13, 1995.

Έστω Σ η κατηγορία των γραμμικά, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων τα οποία περιγράφονται, από το παρακάτω σύστημα, αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$

όπου $\rho := d/dt$ συμβολίζουμε τον διαφορικό τελεστή, $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ με $\det A(\rho) \neq 0$, $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times m}$, $u(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος, $y(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^r$ είναι η έξοδος του συστήματος. Συστήματα της παραπάνω μορφής έχουν εφαρμογές στην ανάλυση κυκλωμάτων (Newcomb 1981), νευρωνικά δίκτυα (DeClaris 1984), οικονομικά (το μοντέλο Leontieff, Luenberger 1978 κ.τ.λ.). Έστω επίσης :

$$\begin{aligned} A(s)^{-1} &= C_\infty \left(I_\mu - sJ_\infty\right)^{-1} B_\infty + C\left(sI_n - J\right)^{-1} B = \\ &= H_u s^u + \cdots + H_1 s + H_0 + H_{-1} s^{-1} + \cdots \end{aligned}$$

όπου $\{H_i, i \in Z\}$ είναι η ακολουθία πινάκων της Laurent ανάπτυξης στο $s = \{\infty\}$ του $A(s)^{-1}$ και $\{C \in R^{r\times v}, J \in R^{v\times v}, B \in R^{v\times r}\}$, $\{C_\infty \in R^{r\times\mu}, J_\infty \in R^{\mu\times\mu}, B_\infty \in R^{\mu\times r}\}$ είναι τα πεπερασμένα και άπειρα ζεύγη Jordan του πίνακα $A(s)$.

Σκοπός λοιπόν της εργασίας αυτής είναι η ανεύρεση μιας κλειστής φόρμουλας λύσης του παραπάνω συστήματος της μορφής :

$$y(t) = f\left(H_i, C, J, B, C_\infty, J_\infty, B_\infty, u^{(i)}(0-), y^{(i)}(0-), u^{(i)}(t)\right)$$

Τα κύρια πλεονεκτήματα της παραπάνω μεθόδου είναι α) ότι επιλύει γραμμικά συστήματα στην πιο γενική τους μορφή και συνεπώς γενικεύει τις πλέον γνωστές μεθόδους των Luenberger (1978), Yip & Sincovec (1981) κ.τ.λ. και β) ότι βοηθάει στην ανάλυση, σύνθεση και σχεδίαση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων επειδή είναι εύκολα υπολογίσιμη.

Citations

1. Mahmood S., 1996, *Some Structural Problems Arising in the Generalized Theory of Linear Multivariable Control Systems*, Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.

16) Karampetakis N. P. and Vardulakis A.I.G., On the reduction of a polynomial matrix model of a linear multivariable system to generalised state space form., Proceedings of the *EURACO Workshop on "Recent Results in Robust and Adaptive Control"*, 11-14th September, 1995, Florence, Italy, pp.65-92.

Έστω Σ ένα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητο, πολυμεταβλητό σύστημα το οποίο περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα, αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} A(\rho)\beta(t) &= B(\rho)u(t) \\ y(t) &= C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t) \end{aligned}$$

Ένα πλέον γνωστό πρόβλημα που υπάρχει στην Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων είναι η αναγωγή του παραπάνω συστήματος Σ σε ένα "ισοδύναμο" σύστημα S, στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (generalized state space system), της μορφής :

$$\begin{aligned} S:\quad E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Η έννοια "ισοδύναμο" αναφέρεται στην ταύτιση των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" ιδιοτήτων των δύο συστημάτων π.χ. ταύτιση των αποσυζευγμένων μηδενικών εισόδου (εξόδου) στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, των πόλων και μηδενικών στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ του συστήματος καθώς και των πόλων και μηδενικών μεταφοράς στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να προτείνει τις γενικεύσεις σε 6 γνωστούς τρόπους αναγωγής συστημάτων (Wolovich 1973, Verghese 1978, Bosgra & Van Der Weiden 1981, Zhang 1989, Tan & Vandewall 1988, Vardulakis 1991) και επιπλέον να δείξει ότι όλοι αυτοί οι τρόποι αναγωγής προέρχονται από μετασχηματισμούς πλήρους ισοδυναμίας του συστήματος Σ. Μάλιστα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες μετασχηματισμών, όπου στην πρώτη κατηγορία είναι απαραίτητη η πραγμάτωση του πίνακα

$$T(s)=\begin{pmatrix} A(s) & B(s) & 0 \\ -C(s) & D(s) & I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ στην δεύτερη κατηγορία είναι απαραίτητη η πραγμάτωση του αντίστροφου του πίνακα πρδ. $T(s)^{-1}$.

Citations

1. Mahmood S., 1996, *Some Structural Problems Arising in the Generalized Theory of Linear Multivariable Control Systems*, Ph. D. Thesis, Loughborough University of Technology, U.K.
2. F. Kraffer, 1996, Polynomial matrix to state space conversion without polynomial reduction, 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation, Maleme, Krete, Greece, June 10-13, 1996, ThA-1.5 (http://med.ee.nd.edu/MED%201996/kraffer.pdf).

17) Pugh A.C., Karampetakis N.P., Mahmood S. and Hayton G.E., 1995, Admissible initial conditions for regular PMDs., Proceedings of the *34th IEEE Conference on Decision and Control,* pp.307-308, December 13-15, 1995, New Orleans, Louisiana.

Έστω Σ ένα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητο, πολυμεταβλητό σύστημα της μορφής :

$$\Sigma: \quad A(\rho)\beta(t)=B(\rho)u(t)$$
$$y(t)=C(\rho)\beta(t)+D(\rho)u(t)$$

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει τις αρχικές συνθήκες του συστήματος οι οποίες χαρακτηρίζουν μοναδικά την λύση του συστήματος (ομαλή ή/και κρουστική). Πιο συγκεκριμένα το σύστημα Σ μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$T(\rho)\xi(t)=Uu(t)$$
$$y(t)=V\xi(t)$$

όπου

$$T(\rho)=\begin{pmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix}=T_0+T_1+\cdots+T_q\rho^q \quad ; \quad U=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \quad ; \quad V=\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Τότε αποδεικνύεται ότι το σύνολο των αρχικών συνθηκών που χαρακτηρίζουν μοναδικά την λύση του παραπάνω συστήματος είναι :

$$\left\{ \left\{ \eta : \eta = \underbrace{\begin{pmatrix} T_q & 0 & \cdots & 0 \\ T_{q-1} & T_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_q \end{pmatrix}}_{X_T} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi(0-) \\ \xi^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \xi^{(q-1)}(0-) \end{pmatrix}}_{\tilde{\xi}(0-)} \quad \begin{pmatrix} \xi(0-) \\ \xi^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \xi^{(q-1)}(0-) \end{pmatrix} \in R^{q(r+m+n)} \right\} \right\}$$

Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται επίσης από το γεγονός ότι κάθε ισομορφισμός μεταξύ των λύσεων ισοδύναμων συστημάτων ανάγεται σε σταθερό ισομορφισμό μεταξύ των αντίστοιχων αρχικών συνθηκών (της παραπάνω μορφής) των συστημάτων.

18) Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Hayton G.E., 1995, The output zeroing problem for general polynomial descriptions., *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control,* pp.3194-3199, December 13-15, 1995, New Orleans, Louisiana.

Το περιεχόμενο της παραπάνω εργασίας είναι μια περίληψη της εργασίας A.20.

19) **Jones J., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1996, Some applications of MAPLE in Linear Systems Analysis, Proceedings of the *IEE Colloquium on "Symbolic Computation for Control"*, London, 2 April, 1996.**

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται ένα πακέτο προγραμμάτων που δημιουργήθηκαν από τους παραπάνω συγγραφείς στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE το οποίο αφορά :
α) την Δομή Συστημάτων (εύρεση γενικευμένου αντίστροφου, μορφής Smith ενός ρητού πίνακα στο C ή στο $s=\{\infty\}$ κ.τ.λ.)
β) την Αναπαράσταση Συστημάτων (εύρεση δεξιά και αριστερά πολυωνυμικών περιγραφών ενός ρητού πίνακα (left and right matrix fraction descriptions), αναγωγή πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων σε «ισοδύναμες» περιγραφές στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων κ.τ.λ.)
γ) την Επίλυση Συστημάτων (επίλυση συνεχών και διακριτών συστημάτων της μορφής : $A(\rho)y(t)=B(\rho)u(t)$ ή $A(\sigma)\beta(k)=B(\sigma)u(k)$ κ.τ.λ.)

Citations
1. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

20) **Jones J., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1996, Solution of discrete ARMA-representations via MAPLE, presented in *a Poster Session of the EURACO Network* (EUropean Robust and Adaptive COntrol Network), Algarve, Portugal, 13-17 May 1996.**

Αποτελεί μια ένα poster με αντικείμενο την υλοποίηση της εργασίας Α.19 στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE.

Citations
1. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

21) **Karampetakis N. P., Jones J. and Antoniou S., 1996, Forward, backward and symmetric solutions of discrete ARMA representations., presented in *a Poster Session of the EURACO Network* (EUropean Robust and Adaptive COntrol Network), Algarve, Portugal, 13-17 May 1996.**

Αποτελεί ένα poster με αντικείμενο το περιεχόμενο της εργασίας Α.19.

22) **Mahmood S., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1996, On the information carried by column (row) reduced MFDs, Proceedings of the *4rth IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pp. 119-124, June 10-14, 1996, Chania, Greece.**

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια περίληψη της εργασίας Α.16.

23) **Tzekis P., Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1996, Solutions of Matrix Diophantine equations over rings via MAPLE, Proceedings of the *4rth IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, June 10-14, 1996, Chania, Crete.**

Θεωρείστε την παρακάτω διοφαντική εξίσωση :

$$A(s)X(s)+B(s)Y(s)=C(s)$$

όπου $A(s)\in R(s)^{p\times m}$, $B(s)\in R(s)^{p\times n}$ and $C(s)\in R(s)^{p\times l}$. Πολλά προβλήματα σύνθεσης στην Θεωρία Ελέγχου πρδ. επανατοποθέτηση ιδιοτιμών, άριστος έλεγχος κ.τ.λ. ανάγονται στην επίλυση της παραπάνω διοφαντικής εξίσωσης σε ορισμένο υποδακτύλιο του $\mathbb{R}(s)$. Στην συγκεκριμένη λοιπόν εργασία προτείνουμε γνωστούς και μη αλγορίθμους επίλυσης της παραπάνω διοφαντικής εξίσωσης στον δακτύλιο των ρητών πινάκων (με στοιχεία στον

$\mathbb{R}(s),\mathbb{R}(z)$) και τους υποδακτύλιους του α) των κανονικά ρητών πινάκων (proper matrices) (με στοιχεία στον $\mathbb{R}_P(s),\mathbb{R}_p(z)$), β) των κανονικά ρητών και Hurwitz-ευσταθών πινάκων (proper and Hurwitz-stable matrices) (με στοιχεία στον $\mathbb{R}_H(s),\mathbb{R}_S(z)$) καθώς και των κανονικά ρητών και Shur-ευσταθών πινάκων (proper and Shur-stable matrices), γ) των κανονικά ρητών και πεπερασμένης ανάπτυξης πινάκων, αναλυτικών για κάθε $s \neq 0$ (proper and finite-expansion matrices) (με στοιχεία στον $\mathbb{R}_f(z)$), δ) των πολυωνυμικών πινάκων (polynomial matrices) (με στοιχεία στον $\mathbb{R}[s],\mathbb{R}[z]$). Οι αλγόριθμοι αυτοί υλοποιούνται στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE με απώτερο στόχο την χρήση τους από το επιστημονικό κοινό στην επίλυση προβλημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.

Citations

1. Π. Τζέκης, 2001, Ανάπτυξη αλγορίθμων Η/Υ για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.
3. P.A. Tzekis, 2007, A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation, Applied Mathematics and Computation, Volume 193, Issue 2, 1 November 2007, Pages 395-407.

24) Karampetakis N. P., 1996, Generalized inverses of two variable polynomial matrices and applications., Proceedings of the *4rth IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pp.220-225, June 10-14, 1996, Chania, Crete.

Πρόκειται για μια περίληψη της εργασίας Α.13.

25) Tzekis P., Karampetakis N. P., and Vardulakis A.I., 1996, On the division of polynomial matrices., *Proceedings of the 4rth IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pp.125-129, June 10-14, 1996, Chania, Crete.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια περίληψη της εργασίας Α.21.

26) Mahmood S., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1996, Structural properties of regular PMDs., Proceedings of the *International Symposium on on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, St. Louis, Missouri, June 24-28, 1996.

Πρόκειται για μια περίληψη της εργασίας Α.16.

27) Jones J., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1996, An algorithm for the computation of the generalized inverse and its implementation via MAPLE., Proceedings of the *International Symposium on on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, St. Louis, Missouri, June 24-28, 1996.

Στην παρούσα εργασία υλοποιείται ο αλγόριθμος εύρεσης του γενικευμένου αντίστροφου ενός ρητού πίνακα που παρουσιάστηκε στην εργασία Β.19, στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE.

Citations

1. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.
2. A. K. Singh, K. M. Krishna, and S. Saripalli, “Planning trajectories on uneven terrain using optimization and non-linear time scaling techniques,” in 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012, pp. 3538 – 3545.

28) Jones J., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1996, Solution of an ARMA-Representation via its boundary mapping equation., Proceedings of the *International*

***Symposium on on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, St. Louis, Missouri, June 24-28, 1996.**

Έστω Σ η κατηγορία των γραμμικά, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων τα οποία περιγράφονται, από το παρακάτω σύστημα, εξισώσεων διαφορών :

$$\Sigma : \quad A(\sigma)y(k) = B(\sigma)u(k)$$

όπου $\sigma y(k) = y(k+1)$, $A(s) = A_0 + A_1 s + \cdots + A_q s^q \in R[s]^{r\times r}$ με $\det[A(\sigma)] \neq 0$, $B(s) = B_0 + B_1 s + \cdots + B_q s^q \in R[s]^{r\times m}$, $u(k):[0,N] \to \mathbb{R}^m$ είναι η είσοδος του συστήματος, $y(k):[0,N] \to \mathbb{R}^r$ είναι η έξοδος του συστήματος. Στην εργασία αυτή γενικεύοντας τα αποτελέσματα του Karamanioglou (1991) που ίσχυαν για $A(s) = sE - A$ και $B(s) = B$, ανάγουμε μέσω ενός αλγορίθμου το παραπάνω σύστημα σε μια σχέση αρχικών-τελικών συνθηκών της μορφής :

$$Z_0 Y_{in} + Z_N Y_{fin} = C$$

όπου

$Y_{in}^T = \left(y(0)^T, y(1)^T, ..., y(q-1)^T\right)^T$ και $Y_{fin}^T = \left(y(N-q+1)^T, y(N-q+2)^T, ..., y(N)^T\right)^T$

Η σχέση αυτή σε συνδιασμό με επιπλέον σχέσεις αρχικών-τελικών συνθηκών που ικανοποιεί το σύστημα μας δίνουν τις ακριβείς τιμές των Y_{in}, Y_{fin} και συνεπώς την λύση του συστήματος μας από ειδική κλειστή φόρμουλα που προτείνεται επίσης στην εργασία αυτή.

Citations

1. Ε. Αντωνίου, 2000, Ανάλυση ιδιαζόντων γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

29) Jones J., Karampetakis N. P. and Pugh A.C., 1996, Computation of the generalised inverse of a rational matrix via MAPLE and applications., *Proceedings of the IEEE Symposium on Computer-Aided Control System Design*, pp.495-500, Deadborn, Michigan, USA, September 15-18, 1996.

Πρόκειται για μια πλήρη υλοποίηση στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού MAPLE των περιεχομένων των εργασιών Α.10 και Β.19. Η αναλυτική μορφή της εργασίας αυτής αποδίδεται με την εργασία Α.12.

Citations

1. Π. Τζέκης, 2001, Ανάπτυξη αλγορίθμων Η/Υ για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

30) Karampetakis N. P., Mahmood S., Pugh A.C. and Hayton G.E., 1996, A characterization of admissibility of the initial conditions of nonregular AR-representations., Proceedings of the *35th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.4242-4243, June 30-July 5, 1997, Cobe, Japan.

Θεωρείστε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από αλγεβρικές και συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οποιοδήποτε βαθμού :

$$\Sigma : \quad A(\rho)\beta(t) = 0$$

όπου $\rho := d/dt$, $A(\rho) = A_0 + A_1\rho + \cdots + A_q\rho^q \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(\sigma)} A(\sigma) = r \le \min(p,m)$ και $\beta(t):[0-,+\infty) \to \mathbb{R}^m$ είναι μια m-διάστατη συνάρτηση. Ορίζουμε ως *αρχικές τιμές* "*initial values*" του $\beta(t)$ το διάνυσμα $\xi(0-) = \left(\beta(0-)^T, \beta^{(1)}(0-)^T, \ldots, \beta^{(q-1)}(0-)^T\right)^T$ ενώ ως *αρχικές συνθήκες* "*initial conditions*" το διάνυσμα

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_q & 0 & \cdots & 0 \\ A_{q-1} & A_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_q \end{pmatrix}}_{X_T} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q-1)}(0-) \end{pmatrix}}_{\xi(0-)}$$

Έστω $B(A) := \{\beta(t) : A(\rho)\beta(t) = 0 \quad \forall t \in [0-,+\infty)\}$ ο ομαλός/κρουστικός χώρος λύσεων του παραπάνω συστήματος. Στόχος της εργασίας είναι να απαντήσει στο ερώτημα «Ποιες είναι οι επιτρεπτές αρχικές συνθήκες του συστήματος ;» με την έννοια των αρχικών συνθηκών που οδηγούν σε μοναδική «λύση» του μη τετράγωνου κατά ανάγκη συστήματος. Όπως μπορούμε να δούμε στην εργασία είναι δυνατό κάτω από συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες να έχουμε απειρία λύσεων που να ανήκουν στο $B(A)$. Αν ορίσουμε ότι το σύνολο αυτό των λύσεων αντιστοιχεί σε μια «λύση» τότε μπορούμε να χωρίσουμε τον χώρο $B(A)$ σε κλάσεις π.χ. $B(A)/Z$ και να δείξουμε την ένα προς ένα αντιστοιχία του χώρου κλάσεων $B(A)/Z$ (και όχι του $B(A)$) με τον χώρο των αρχικών συνθηκών.

31) Karampetakis N. P., Jones J. and Antoniou S., 1997, Forward, backward and symmetric solutions of discrete time ARMA-representations, Proceedings of the *4rth European Control Conference*, 1-4 July, 1997, Brussels, Belgium.

Η εργασία αυτή αποτελεί περίληψη της εργασίας Α.19.

Citations
1. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

32) Karampetakis N. P., Pugh A.C., and Hayton G.E., 1997, A fundamental notion of equivalence for AR-representations, Proceedings of the *4rth European Control Conference*, 1-4 July, 1997, Brussels, Belgium (*Mathematical Report No.A271*, Department of Mathematical Sciences, Loughborough University of Technology, U.K.)

Στην εργασία αυτή προτείνουμε ένα καινούργιο είδος ισοδυναμίας μεταξύ μη τετράγωνων ομογενών γραμμικών συστημάτων που αποτελούνται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, όπως φαίνεται παρακάτω :

Θεωρείστε δύο γραμμικά μη τετράγωνα ομογενή συστήματα Σ_i ι=1,2, συνηθών αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$T_i(\rho)\xi_i(t) = 0 \quad i = 1,2$$

όπου $\rho := d/dt$, $T_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p_i\times m_i}$ με $p_1 - m_1 = p_2 - m_2$. Τα $\Sigma_i, i = 1,2$ θεωρούνται θεμελιώδη *ισοδύναμα* (*fundamentallly equivalent*) εάν-ν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" χώρων λύσεων των δύο συστημάτων της μορφής :

$$\xi_2(t) = N(\rho)\xi_1(t) \tag{4}$$

ο οποίος ανάγεται σε έναν ισομορφισμό μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας που παράγουν οι λύσεις $\xi_1(t), \xi_2(t)$.

Ένα πρώτο πρόβλημα που παρουσιάζεται στον παραπάνω ορισμό είναι ότι η σχέση (4) δεν είναι πάντα απεικόνιση. Αποδεικνύουμε ότι η σχέση (4) είναι απεικόνιση εάν-ν ισχύει η παρακάτω McMillan συνθήκη :

$$\delta_M \begin{pmatrix} T_1(\rho) \\ N(\rho) \end{pmatrix} = \delta_M \left(T_1(\rho) \right)$$

Στην συνέχεια δείχνουμε ότι εάν η σχέση (4) είναι ομομορφισμός μεταξύ των χώρων λύσεων B_1, B_2 των δύο συστημάτων τότε ο ομορφισμός αυτός ανάγεται σε έναν ομομορφισμό μεταξύ των χώρων κλάσεων ισοδυναμίας που παράγουν οι παραπάνω λύσεις, εάν-ν υπάρχει ένας πολυωνυμικός πίνακας $M(s)$ τέτοιος ώστε $M(s)T_1(s) = T_2(s)N(s)$. Εάν η εικόνα του B_1 μέσω της σχέσης (4) είναι ο χώρος B_2 τότε $\delta_M \left(T_2(\rho) \quad M(\rho) \right) = \delta_M \left(T_2(\rho) \right)$. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η σχέση (4) να είναι ένα-προς-ένα είναι ο σύνθετος πίνακας $\begin{pmatrix} T_1(\rho) \\ N(\rho) \end{pmatrix}$ να μην έχει πεπερασμένα μηδενικά καθώς και μηδενικά στο $s = \{\infty\}$. Μια επίσης ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η σχέση (4) να είναι επί είναι ο σύνθετος πίνακας $\left(T_2(\rho) \quad M(\rho) \right)$ να μην έχει πεπερασμένα μηδενικά καθώς και μηδενικά στο $s = \{\infty\}$. Συμπεραίνουμε τέλος ότι δύο μη τετράγωνα ομογενή συστήματα διαφορικών εξισώσεων είναι θεμελιώδη ισοδύναμα εάν-ν οι πίνακες $T_1(s), T_2(s)$ είναι πλήρως ισοδύναμοι.

Η προτεινόμενη θεμελιώδης ισοδυναμία αποτελεί μια γενίκευση της θεμελιώδους ισοδυναμίας που προτάθηκε από τον Pernebo (1977) καθώς και από τους ίδιους τους συγγραφείς για τετράγωνα συστήματα (δες Β.3).

Citations

1. Henri Bourles, 2003, Impulsive behaviours of discrete and continuous time varying systems: A unified approach, ECC'03.

33) J. Jones, P. Tzekis and N. P. Karampetakis, 1997, The use of MAPLE in linear systems analysis and synthesis., Proceedings of the 4th *European Control Conference*, 1-4 July, 1997, Brussels, Belgium.

Σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσει τέσσερα νέα πακέτα προγραμμάτων που έγιναν στο υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας MAPLE για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών χρονικά αμετάβλητων πολυμεταβλητών συστημάτων. Τα πακέτα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη της αλγεβρικής δομής ρητών πινάκων, την μελέτη της λύσης ARMA-περιγραφών, την αναγωγή πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων σε συστήματα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, την λύση διοφαντικών εξισώσεων πολυωνυμικών πινάκων με εφαρμογές σε προβλήματα σύνθεσης όπως τα προβλήματα model matching, disturbance rejection κ.α..

Citations

1. Ε. Αντωνίου, 2000, Ανάλυση ιδιαζόντων γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
2. Π. Τζέκης, 2001, Ανάπτυξη αλγορίθμων Η/Υ για την ανάλυση και σύνθεση γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.
3. Jones J., 1999, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Loughborough University of Technology, U.K.

34) A. I. G. Vardulakis, S. N. Antoniou and N. P. Karampetakis, 1997, A spectral characterization of the behavior of discrete time AR-Representations over a finite time interval, Proceedings of the 4th *European Control Conference*, 1-4 July, 1997, Brussels, Belgium.

Αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση της εργασίας Α.18.

35) **S. N. Antoniou, N. P. Karampetakis and A. I. G. Vardulakis, 1997, A classification of the solution of non-regular, discrete time descriptor systems., Proceedings of the *36th IEEE Conference on Decision and Control,* pp.3156-3161, San Diego, CA, 10-12 December 1997.**

Θεωρείστε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από αλγεβρικές και συνήθεις εξισώσεις διαφορών :

$$\Sigma: \quad Ew(t+1) = Aw(t)$$

όπου $E, A \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)}(sE - A) = r \leq \min(p,m)$ και $w(t):[0,N] \to \mathbb{R}^m$ είναι μια *m*-διάστατη συνάρτηση. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει τον χώρο λύσεων του παραπάνω συστήματος. Όπως αποδεικνύεται ο χώρος λύσεων του παραπάνω συστήματος είναι στενά συνδεδεμένος με την αλγεβρική δομή του πίνακα $sE - A$. Αποδεικνύουμε ότι α) ο χώρος λύσεων αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας αντί συγκεκριμένων *m*-διάστατων συναρτήσεων και β) ότι η διάσταση του χώρου λύσεων είναι ίση με $f=n+\mu+2(\varepsilon+r)$ όπου n={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $\mathbb{C}$ του πίνακα $sE - A$ (συμπεριλαμβανομένης και της τάξης)}, μ={το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο $s = \{\infty\}$ του πίνακα $sE - A$ (συμπεριλαμβανομένης και της τάξης) προσαυξημένο του καθενός κατά ένα}, και ε={το πλήθος των δεξιά ελαχίστων δεικτών του πίνακα $sE - A$ (συμπεριλαμβανομένης και της τάξης) προσαυξημένο του καθενός κατά ένα}. Η συμβολή της αριστεράς μηδενικής δομής του είναι στο να παράγει ένα σύνολο παραδεκτών αρχικών συνθηκών κάτω από τις οποίες το σύστημα μου δεν έχει λύση. Αλγόριθμοι για την δημιουργία του χώρου λύσεων και του συνόλου των παραδεκτών αρχικών συνθηκών δίνονται στην εργασία αυτή.

36) **N. P. Karampetakis and P. Tzekis, 1998, Notes on the computation of the inverse of a polynomial matrix, *6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Alghero, Sardinia, Italy, June 9-11, 1998.**

Αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση της εργασίας Α.24.

Citations

1. M. D. Petcovic and P. S. Stanimirovic, Symbolic computation of the Moore–Penrose inverse using a partitioning method, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 82, No. 3, March 2005, 355–367.
2. Milan B. Tasic´, Predrag S. Stanimirovic´, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*, to appear.
3. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2007, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, to appear.
4. P. S. Stanimirovic and M. B. Tasic, 2008, Computing generalized inverses using LU factorization of matrix product. International Journal of Computer Mathematics, to appear.
5. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.
6. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, *Applied Mathematics and Computation*, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.

37) **Karampetakis N.P., 1999, Descriptor realizations of AR-Representations, *5th European Control Conference,* Karlsruhe, Germany, August 31 - September 3, 1999.**

Αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση της εργασίας Α.27.

38) **Karampetakis N.P. and Tzekis P., 1999, Symbolic manipulation of rational matrices and applications, *10th IEEE International Symposium on Computer Aided Control System***

***Design* (*CACSD'99*), Hawaii, U.S.A., Aug. 16-22, 1999 (Prof. Varga has invited me to be a co-chair in the session TuA1 Computer Algebra in CACSD).**

Η συγκεκριμένη εργασία προτείνει ένα πακέτο προγραμμάτων στην συμβολική γλώσσα προγραμματισμού του MAPLE V, τα οποία έχουν ως κύριο σκοπό την επίλυση προβλημάτων της Θεωρίας Ελέγχου όπως :

α) Ρητές συναρτήσεις
Εύρεση α) του βαθμού μιας ρητής συνάρτησης (discrete valuation) και β) του πηλίκου και του υπόλοιπου της ευκλείδιας διαίρεσης δύο ρητών συναρτήσεων.

β) Ρητοί πίνακες
Εύρεση α) της Smith μορφής ενός ρητού πίνακα σε διαφορετικούς δακτυλίους (στο $\mathbb{C}$, $s=\{\infty\}$, κ.λ.π.), β) του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο ρητών πινάκων (σε διαφορετικούς δακτυλίους), γ) του McMillan βαθμού ενός ρητού πίνακα, δ) του γενικευμένου αντίστροφου ενός πίνακα.

γ) Πραγματώσεις *(realizations) ρητών πινάκων.*
Εύρεση της δεξιά (αριστερής) πρώτης (ως προς συγκεκριμένο δακτύλιο) κλασματικής παράστασης ενός ρητού πίνακα.

δ) *Επίλυση διοφαντικών εξισώσεων με συντελεστές ρητούς πίνακες.*
Εύρεση της ειδικής και γενικής λύσης σε διαφορετικούς δακτυλίους μιας διοφαντικής εξισώσεως με συντελεστές ρητούς πίνακες π.χ. πολυωνυμικές λύσεις, ευσταθείς λύσεις, αυστηρά ρητές λύσεις κ.α.

ε) *Εφαρμογή των διοφαντικών εξισώσεων σε προβλήματα Θεωρίας Ελέγχου.*
Επίλυση των προβλημάτων α) stabilizing compensator problem, β) model matching problem, και γ) asymptotic tracking problem.

Η χρήση προγραμμάτων συμβολικής επεξεργασίας όπως το Maple μας δίνει την δυνατότητα, σε αντίθεση με άλλα προγραμματιστικά περιβάλλοντα, να επεξεργαζόμαστε σύμβολα αντί αριθμών, να εκτελούμε πράξεις με όση ακρίβεια θέλουμε, και να χειριζόμαστε το μεγάλο πλήθος έτοιμων υπορουτίνων που μας προσφέρουν τα προγράμματα αυτά.

Citations

1. Vázquez Seisdedos, Luis; Llosas Albuerne, Yolanda; Mazaira Morales, Israel; Bychkó, Houdayer, Basilio, LABORATORIO SIMULADO DE GENERADOR DE VAPOR CON DOMO, Ciencia en su PC, ISSN (Versión impresa): 1027-2887, cpc@megacen.ciges.inf.cu, Instituto de Información Científica y Tecnológica, Cuba.

39) P. Stanimirovic and N. P. Karampetakis, 2000, Symbolic implementation of Leverrier-Faddeev algorithm and applications., *7th IEEE Mediterranean Conference on Control & Automation*, Patra, Greece.

Αποτελεί μια πρώτη μορφή της εργασίας Α.36.

Citations

1. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2007, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, to appear.
2. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, 2008, Symbolic and recursive computation of different types of generalized inverses, *Applied Mathematics and Computation*, 199, 349–367.
3. Stanimirovic PS, Tasic MB, Vu KM, 2009, Extensions of Faddeev's algorithms to polynomial matrices, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, Volume: 214, Issue: 1, Pages: 246-258.

4. Marko D. Petkovic, 2008, SIMBOLICKO IZRACUNAVANJE HANKELOVIH DETERMINANTI I GENERALISANIH INVERZA MATRICA, Doktorska disertacija, Ni·s, Jun 2008.

40) **P. Tzekis, N.P. Karampetakis and A.I.G. Vardulakis , 2001, RATRIX : A RATional matRIX calculator for computer aided analysis and synthesis of linear multivariable control systems, *KTISIVIOS*, *National Conference on Automation, Robotics and Industrial Production*, Santorini, June 28-30, 2001.**

Σκοπός της εργασία αυτής είναι να παρουσιάσει ένα νέο διαδραστικό λογισμικό για την ανάλυση, σύνθεση και σχεδίαση πολυμεταβλητών συστημάτων. Το περιβάλλον του παραπάνω προγράμματος στηρίζεται στις συμβολικές δυνατότητες τους αλγεβρικού υπολογιστικού συστήματος Maple και συνεπώς διαθέτει όλα εκείνα τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν τα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας.

41) **N. P. Karampetakis and P. Stanimirovic, 2001, On the computation of the Drazin inverse of a polynomial matrix, *1rst IFAC Symposium on System Structure and Control*, August 29-31, 2001, Prague, Czech Republic.**

Αποτελεί την πρώτη μορφή της εργασίας Α.37.

Citation
1. Marko D. Petković, Predrag S. Stanimirović and Milan B. Tasić, 2007, Effective partitioning method for computing weighted Moore–Penrose inverse, Computers & Mathematics with Applications, to appear.

42) **N. P. Karampetakis, 2001, On a new notion of equivalence of polynomial matrices, *1rst IFAC Symposium on System Structure and Control*, August 29-31, 2001, Prague, Czech Republic.**

Η πλήρης ισοδυναμία (full equivalence) είναι ένας μετασχηματισμός μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων ο οποίος προτάθηκε από τους Hayton et.al. 1988 [H2] και η οποία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτα τα πεπερασμένα αλλά και τα μηδενικά στο άπειρο των ισοδύναμων πολυωνυμικών πινάκων. Η γεωμετρική ερμηνεία των μηδενικών αυτών έχει στο παρελθόν συσχετισθεί με τις ομαλές και κρουστικές λύσεις των συνεχών ομογενών, γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων συστημάτων που προκύπτουν από τους πολυωνυμικούς πίνακες (π.χ. στον πολυωνυμικό πίνακα $A(\rho)=A_0+A_1\rho+\cdots+A_q\rho^q$ αντιστοιχεί το ομογενές σύστημα $A(\rho)\beta(t)=0$, όπου $\rho\beta(t)=\beta^{(1)}(t)$, το οποίο διαθέτει ομαλές και κρουστικές λύσεις λόγω των πεπερασμένων μηδενικών και των μηδενικών στο άπειρο). Στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων, έχουμε δείξει στις εργασίες Β.44-Β.45 την στενή σχέση του προς τα εμπρός και πίσω χώρου λύσεων (forward και backward solution space) με τους πεπερασμένους αλλά και άπειρους στοιχειώδεις διαιρέτες των πολυωνυμικών πινάκων που περιγράφουν τα διακριτά συστήματα. Οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο εμπεριέχουν πληροφορίες και για τα μηδενικά αλλά και για τους πόλους στο άπειρο ενός πολυωνυμικού πίνακα. Λόγω της σημασίας τους στον χώρο λύσεων των διακριτών συστημάτων, προτείνουμε στην εργασία αυτή μια νέα ισοδυναμία μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων, την divisor equivalence, μεταξύ τετράγωνων πολυωνυμικών πινάκων η οποία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτους τους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο και τους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες. Οι συνθήκες που προτείνονται είναι αναγκαίες και όχι ικανές. Επιπλέον προτείνεται μια μέθοδος αναγωγής ενός πολυωνυμικού πίνακα σε ένα divisor equivalent πίνακα πρώτης τάξης (matrix pencil). Η προτεινομένη ισοδυναμία αποτελεί μια γενίκευση της strict equivalence που είχε προταθεί στο [G1] για την ειδική περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων πρώτης τάξης (matrix pencils).

43) **N. P. Karampetakis, 2002, On the construction of the forward and backward solution space of a discrete time AR-Representation, Proceedings of the *15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 21-26 July 2002. (co-chair)**

Αποτελεί μια πρώτη μορφή της εργασίας Α.30. Η εργασία αυτή ασχολείται κατά κύριο λόγο με την δημιουργία αντιπροσώπων του χώρου λύσεων, βασιζόμενοι στην αλγεβρική δομή του πολυωνυμικού πίνακα $A(\sigma)$ σε αντίθεση με την επόμενη εργασία Γ.45 που ως κύριο στόχο έχει να αποδείξει την διάσταση του χώρου λύσεων που αναφέραμε παραπάνω.

Citations
1. Henri Bourles, 2003, Impulsive behaviours of discrete and continuous time varying systems: A unified approach, ECC'03.
2. Henri Bourles, 2004, Impulsive systems and behaviors in the theory of linear dynamical systems, Forum Mathematicum.

44) **N. P. Karampetakis, 2001, On the determination of the dimension of the solution space of a discrete time AR-Representation, Proceedings of the *15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 21-26 July 2002. (co-chair)**

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αποδείξει ποια είναι η σχέση της διάστασης του χώρου λύσεων των συστημάτων που περιγράφηκαν στην εργασία Β.44 σε σχέση με τις βασικές αναλλοίωτες του πολυωνυμικού πίνακα $A(\sigma)$. Όπως και η Β.44 έτσι και αυτή εμπεριέχονται στην εργασία Α.30.

Citations
1. Henri Bourles, 2003, Impulsive behaviours of discrete and continuous time varying systems: A unified approach, ECC'03.
2. Henri Bourles, 2004, Impulsive systems and behaviors in the theory of linear dynamical systems, Forum Mathematicum.

45) **N. P. Karampetakis, S. Vologianidis and A.I. Vardulakis, 2001, Notions of equivalence for discrete time AR-representations, Proceedings of the *15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 21-26 July 2002. (invited paper)**

Η εργασία αυτή αποτελεί συνέχεια της εργασίας Γ.43. Πιο συγκεκριμένα στην εργασία Γ.43 είχαμε προτείνει μια νέα ισοδυναμία μεταξύ τετράγωνων πολυωνυμικών πινάκων (divisor equivalence) η οποία έδινε αναγκαίες και όχι ικανές συνθήκες για την διατήρηση των πεπερασμένων διαιρετών αλλά και των διαιρετών στο άπειρο πολυωνυμικών πινάκων. Στην εργασία αυτή αποδεικνύουμε ότι οι συνθήκες που είχαμε προτείνει στην εργασία Γ.43 είναι επιπλέον και ικανές για την ειδική κατηγορία των τετράγωνων πολυωμικών πινάκων. Επιπλέον η ισοδυναμία μας επεκτείνετε και σε μη τετράγωνους πολυωνυμικούς πίνακες, ενώ αποδεικνύεται η στενή σχέση της με την strict equivalence που προτάθηκε από τους Vardulakis & Antoniou (2001) [V4].

46) **N. Karampetakis and S. Vologiannidis, 2002, DFT calculation of the generalized and Drazin inverse of a polynomial matrix. (invited paper) Proceedings of the *13th IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design* (*CACSD'02*), pp.266-271, 18th – 20th September 2002, Glasgow, Scotland, UK.**

Η εργασία αυτή αποτελεί περίληψη της εργασίας Α.25.

47) **N. Karampetakis and S. Vologiannidis, 2002, Notions of equivalence for discrete time AR-Representations, (invited speaker on a session dedicated to the 70th anniversary of Prof. Tadeusz Kaczorek), *8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 2-5 September 2002, Sczcecin, Poland.**

Αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση της εργασίας Α.29.

48) **A.I. Vardulakis, N.P. Karampetakis, E. Antoniou, P. Tzekis and S. Vologiannidis, 2003, A descriptor package for Mathematica, *11th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 18-20 June 2003, Rhodes, Greece.**

Στην εργασία αυτή προτείνουμε ένα νέο πακέτο συναρτήσεων που έχει δημιουργηθεί για το αλγεβρικό σύστημα Mathematica και έχει ως αντικείμενο τα ιδιόμορφα συστήματα. Το νέο αυτό πακέτο είναι πλήρως συμβατό με δύο άλλα πακέτα που έχουν δημιουργηθεί στο ίδιο σύστημα : α) το Control System Professional, και β) το Polynomial Control Systems που κατασκευάζεται παράλληλα στο Πανεπιστήμιο του UMIST από τον Prof. N. Munro. Το νέο αυτό πακέτο κάνοντας χρήση των συναρτήσεων που έχουν δημιουργηθεί στα δύο προαναφερόμενα πακέτα δημιουργεί συναρτήσεις για την ανάλυση, σύνθεση και σχεδίαση ιδιόμορφων συστημάτων (descriptor systems). Επιπλέον προστέθηκαν συναρτήσεις για τον χειρισμό πολυωνυμικών και ρητών πινάκων, οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στην Θεωρία Ελέγχου. Το πακέτο αυτό δημιουργήθηκε σε συνεργασία με την εταιρεία Wolfram Research και πρόκειται να κυκλοφορήσει σύντομα στο ευρύ κοινό. Την στιγμή αυτή δημιουργείται το απαραίτητο manual καθώς γίνονται και τελευταίοι έλεγχοι των συναρτήσεων που δημιουργήθηκαν.

Citations

1. N. Munro, 2003, A polynomial control systems package, Proceedings of the 11th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 18-20, Rhodes, Greece.

49) **N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, 2003, Inverses of multivariable polynomial matrices by discrete Fourier transforms, (invited paper) *7th European Control Conference* 2003, Cambridge, 1-4 September 2003, U.K.**

Αποτελεί μια συνοπτική παρουσίαση της εργασίας A.31, χωρίς αναφορές στην πολυπλοκότητα των αλγορίθμων και στους χρόνους υλοποίησης.

50) **N. P. Karampetakis and S. Vologiannidis, 2004, On the fundamental matrix of the inverse of a polynomial matrix with applications, *12th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Kusadasi, Turkey, June 6-9, 2004.**

Αποτελεί την πρώτη μορφή της εργασίας Α41.

Citations

1. Milan B. Tasic, Predrag S. Stanimirovic, Marko D. Petkovic, 2007, Symbolic computation of weighted Moore–Penrose inverse using partitioning method, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 189, Issue 1, 1 June 2007, Pages 615-640.

51) **P. Kujan, M. Hromcik, M. Sebek, N.P. Karampetakis, E.N. Antoniou and S. Vologiannidis, 2004, Effective computations with 2-variable polynomial matrices in MATHEMATICA, *12th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Kusadasi, Turkey, June 6-9, 2004.**

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από μια συνεργασία μέσω Erasmus που είχαμε με το Τεχνικό Πανεπιστήμιο της Πράγας. Πιο συγκεκριμένα προετείνονται αριθμητικές ρουτίνες για τον χειρισμό πολυωνυμικών πινάκων 2 μεταβλητών. Ως πρώτο βήμα ορίζεται ένα νέο object για την καταχώριση ενός πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών και στη συνέχεια μελετούμε την επίλυση ενός προβλήματος εύρωστου ελέγχου με την βοήθεια των συναρτήσεων που δημιουργήσαμε. Ο προτεινόμενος τρόπος αντιμετώπισης δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τον συμβολικό τρόπο επεξεργασίας που χρησιμοποιεί το Mathematica.

52) **E.N. Antoniou, S. Vologiannidis, N. Karampetakis, "Linearizations of polynomial matrices with symmetries and their applications", Proc. of the *Joint 2005 International Symposium on Intelligent Control & 13th Mediterranean Conference on Control and Automation (2005 ISIC-MED)*, June 2005, Limassol, Cyprus.**

Δοθέντος ενός πολυωνυμικού πίνακα

$$A(s) = A_0 + A_1 s + \cdots + A_q s^q \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$$

όπου $\det A(s) \neq 0$, προτείνεται μια οικογένεια πολυωνυμικών πινάκων πρώτου βαθμού ως προς s π.χ. $sE_i - A_i$, η οποία έχει την ιδιότητα ότι όλα τα μέλη της έχουν την ίδια δομή στοιχειωδών διαιρετών (πεπερασμένων (finite elementary divisors) αλλά και στο άπειρο (infinite elementary divisors)). Ως εφαρμογή προτείνεται η αναγωγή ενός πολυωνυμικού πίνακα, του οποίου οι συντελεστές είναι συμμετρικοί πίνακες (ή skew συμμετρικοί ή ενναλάξ συμμετρικοί με skew συμμετρικοί), σε ένα pencil της μορφής $sE - A$ το οποίο διατηρεί την συμμετρία όσον αφορά την δομή των πινάκων του και διατηρεί επιπλέον και την δομή των στοιχειωδών διαιρετών του αρχικού πολυωνυμικού πίνακα. Η συγκεκριμένη τεχνική βοηθάει στην αναγωγή συστημάτων που περιγράφονται από συστήματα διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

53) N. P. Karampetakis, 2005, On the solution of the implicit Roesser model, Proceedings of the *13th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Limassol, Cyprus, June 27-29, 2005.

Αποτελεί μια περιληπτική μορφή της εργασίας Α.40.

54) N. P. Karampetakis, 2005, On the solution of the general singular model of 2-D systems, Proceedings of the *16th IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic, July 4-8, 2005.

Σε αντίθεση με την εργασία Α.40 εδώ προτείνονται κλειστές φόρμουλες λύσεως για το general singular 2-D μοντέλο

$$\begin{aligned} Ex(i+1,j+1) &= A_0x(i,j) + A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) + \\ &+ B_0u(i,j) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1) \end{aligned}$$

Το implicit Roesser μοντέλο που μελετούμε στην εργασία Α.40 και Β.56 αποτελεί ειδική μορφή του general singular 2-D μοντέλου μιας και γράφεται ως

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ E_3 & 0 \end{bmatrix}}_{-A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i+1,j) \end{bmatrix}}_{x(i+1,j)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ 0 & E_4 \end{bmatrix}}_{-A_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i,j+1) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix}}_{x(i,j+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}}_{A_0} \underbrace{\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}}_{x(i,j)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{B_0} u(i,j)$$

55) P. Tzekis and N. P. Karampetakis, 2005, On the computation of the minimal polynomial of a two-variable polynomial matrix, *4th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems* (NDS 2005), pp.83-89, July 10-13, 2005, University of Wuppertal, Wuppertal, Germany.

Αποτελεί γενίκευση της εργασίας Α.33 σε πολυωνυμικούς πίνακες δύο μεταβλητών.

56) A.C. Pugh, E. Antoniou and N. P. Karampetakis, Equivalence of AR-Representations in the Light of the Impulsive-Smooth Behavior, Proceedings of the *44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, pp.1547-1552, December 12-15, 2005, Seville, Spain.

Αποτελεί μια περιληπτική μορφή της εργασίας Α.38.

57) A.C.Pugh, G.E. Hayton, E.M.O. EL-Nabrawy and N. P. Karampetakis, 2006, Numerator-Denominator Structures of n-D MFDs, Proc. of the *14th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'06)*, June 2006, Ancona, Italy.

Είναι γνωστό ότι η μηδενική δομή μιας δεξιάς (αριστεράς) πρώτης πολυωνυμικής περιγραφές (coprime matrix fraction descriptions) ενός ρητού πίνακα μιας μεταβλητής μας δίνει την δομή των πόλων/μηδενικών του πίνακα. Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε έναν ρητό πίνακα *n* μεταβλητών; Στην περίπτωση πολυωνυμικών πινάκων που έχουν περισσότερες από μια μεταβλητές έχουμε διαφορετικά είδη coprimeness (zero coprimeness, factor coprimeness και minor coprimeness). Στόχος της εργασίας αυτής είναι να μελετήσει κατά πόσο μπορούμε να βρούμε πληροφορίες για την δομή ενός ρητού πίνακα *n*-μεταβλητών από την δομή μιας πολυωνυμικής περιγραφής του. Δίνονται τα πιθανά είδη πολυωνυμικών περιγραφών (zero-coprime, factor-coprime και minor-coprime) τις οποίες μπορεί να έχει ένας ρητός πίνακας n-μεταβλητών και στις περιπτώσεις αυτές προσδιορίζει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των δομών των πολυωνυμικών πινάκων και της δομής του ρητού πίνακα.

58) **M.S. Boudellioua and N.P. Karampetakis, 2006, Zero-Coprime System Equivalence of Singular 2-D Linear Models, Proc. of the *14th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'06)*, June 2006, Ancona, Italy.**

Αρχικά δίνουμε την σχέση μεταξύ των πολυωνυμικών περιγραφών μιας σειράς από 2-D ιδιόμορφων μοντέλων (singular 2-D general model, Fornasini-Marchesini model, Attasi model και singular Roesser model). Στη συνέχεια προτείνεται ένας τρόπος μετασχηματισμού ενός singular 2-D general μοντέλου σε ένα singular 2-D Roesser μοντέλο.

59) **N. P. Karampetakis, 2006, An equivalent reduction of a 2-D symmetric polynomial matrix, *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design (CACSD'06)*, October 2006, Munich, Germany, pp.385-390.**

Η εργασία αυτή αποτελεί γενίκευση της εργασίας Β.55 για πολυωνυμικούς πίνακες δύο μεταβλητών των οποίων οι συντελεστές παρουσιάζουν συμμετρία. Προτείνεται δηλαδή ένας τρόπος αναγωγής ενός συμμετρικού πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών

$$A(s,z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A_{ij}s^{i}z^{j},\ A_{ij}=A_{ij}^{T}$$

σε ένα συμμετρικό pencil δύο μεταβλητών

$$R(s,z)=R_{00}+R_{10}s+R_{01}z+R_{11}sz,\ \ R_{ij}=R_{ij}^{T},\ \ i=0,1,\quad j=0,1$$

διατηρώντας την μηδενική δομή του αρχικού πίνακα. Τα αποτελέσματα στην συνέχεια μεταφέρονται στην περίπτωση των πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων.

60) **P. Tzekis, N. P. Karampetakis and H.K. Terzidis, On the computation of the GCD (LCM) of 2-D polynomials, *9th European Control Conference*, Kos, Greece, July 2-5, 2007.**

Αποτελεί μια πρώτη μορφή της εργασίας Α.39.

61) **A.I.G. Vardulakis, N. P. Karampetakis and E. Antoniou, On the realization theory of polynomial matrices and the algebraic structure of pure generalized state space systems, *9th European Control Conference*, Kos, Greece, July 2-5, 2007.**

Αποτελεί μια πρώτη μορφή της εργασίας Α.40.

62) **A.I. Vardulakis, N.P. Karampetakis, E. Antoniou and S. Vologiannidis, Descriptor Systems Toolbox : A Mathematica-Based Package for Descriptor Systems, *9th IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (CACSD'08)*, September 3-5, 2008, San Antonio, Texas (USA)**../../../../../AppData/Roaming/Microsoft/nikos/karampet/Proceedings/ecc2007.rar**.**

Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει ένα νέο πακέτο συναρτήσεων (αριθμητικές και συμβολικές) για ιδιόμορφα συστήματα ελέγχου στο υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας Mathematica. Το νέο αυτό πακέτο, το οποίο ήλθε να καλύψει το κενό που υπάρχει σε υπάρχοντα πακέτα για τα ιδιόμορφα συστήματα ελέγχου, δημιουργήθηκε σε συνεργασία με την Ελληνική εταιρεία Ζήνων και την Αμερικάνικη εταιρεία Wolfram Research Inc. μέσα από ένα πρόγραμμα διακρατικής συνεργασίας με χώρες εκτός Ευρωπαϊκής Ένωσης της ΓΓΕΤ.

63) **Dimitris Varsamis, Nikos Karampetakis, 2008, PolyxGui : A New Graphical User Interface (GUI) for the Polynomial Toolbox POLYX, *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, June 25-27, 2008.**

Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιασθεί ένα νέο διαδραστικό γραφικό περιβάλλον που έχει δημιουργηθεί στο Matlab το οποίο δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να χειρίζεται γραφικά τις συναρτήσεις του πολυωνυμικού πακέτου του Matlab γνωστού ως Polyx. Το πακέτο αυτό περιέχει περίπου 222 M-files σε κώδικα Matlab τα οποία αφορούν τον χειρισμό πουωνυμικών πινάκων αλλά και την ανάλυση, σύνθεση και σχεδίαση συστημάτων βάσει πολυωνυμικών μεθόδων. Η εργασία αυτή δημιουργήθηκε στην διάρκεια της διπλωματικής εργασίας του κ. Βαρσάμη.

64) **N.P. Karampetakis, E.N. Antoniou, A.I.G. Vardulakis, and S. Vologiannidis, 2009, Symbolic Computations on Rings of Rational Functions and Applications in Control Engineering, Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2009, Proceedings of the 12th International Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, February 2009.**

Η παρούσα εργασία περιγράφει μια συλλογή συμβολικών αλγορίθμων που έχουν υλοποιηθεί στο περιβάλλον συμβολικής επεξεργασίας Mathematica 7.0 και η οποία είναι άμεσα διαθέσιμη στο Internet. Οι αλγόριθμοι αυτοί χρησιμοποιούνται για τον χειρισμό ρητών συναρτήσεων και την επίλυση προβλημάτων ανάλυσης και σχεδιάσης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου μέσω της αλγεβρο-πολυωνυμικής προσέγγισης. Το πακέτο που δημιουργήθηκε περιέχει όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την χρήση της θεωρίας των Ω-ευσταθών συναρτήσεων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη νέων αλγορίθμων σε συγκεκριμένα προβλήματα ελέγχου.
Επιλεγμένες εργασίες του συνεδρίου, όπως η συγκεκριμένη, οι οποίες έχουν διορθωθεί, δημοσιεύτηκαν σε εκτεταμένη μορφή στο Lecture Notes in Computer Science, Vol. 5717, Subseries: Theoretical Computer Science and General Issues.

65) **N. P. Karampetakis and A. Grigoriadou, 2011, On a first order hold discretization for singular systems, 2011 International Conference on Communications, Computing and Control Applications (CCCA'11), March 3-5, 2011, Hammamet, Tunisia.**

Η παρούσα εργασία επεκτείνει τις γνωστές διακριτοποιήσεις πρώτης τάξης (first order hold with interpolating/extrapolating of the inputs and its derivatives) στην γενική κατηγορία των ιδιόμορφων συστημάτων (singular systems). Η κύρια διαφορά από τα συστήματα στον χώρο των καταστάσεων είναι ότι επιπλέον χρειαζόμαστε μια παρεμβολή (interpolation/extrapolation) των παραγώγων της εισόδου. Ανάλογα με την παρεμβολή που θα χρησιμοποιήσουμε οδηγούμαστε σε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η ευστάθεια των συστημάτων διατηρείται μετά την διακριτοποίηση. Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται να συμπληρώσουν την αντίστοιχη διακριτοποίηση μηδενικής τάξης που είχε αντιμετωπισθεί στην εργασία [A28].

66) **D. Varsamis and N. P. Karampetakis, 2011, On the Newton multivariate polynomial interpolation with applications, 7th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems, September 5-7, 2011, Poitiers, France.**

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει μια βελτιωμένη έκδοση της μεθόδου παρεμβολής Newton που παρουσιάστηκε στον (Neidinger, 2009) για πολυωνυμικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών f(x,y) με γνωστά άνω όρια των βαθμών των μεταβλητών x, y. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος αποδεικνύεται ότι υπερτερεί ως προς τον βαθμό πολυπλοκότητας του αντίστοιχου που παρουσιάστηκε στον (Neidinger, 2009). Μια εφαρμογή του αλγορίθμου που παρουσιάζεται στην εργασία αυτή είναι ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός πολυωνυμικού πίνακα δύο μεταβλητών.

67) **Nicholas P. Karampetakis, 2012, Construction of algebraic-differential equations with given smooth-impulsive behavior, 20th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, July 9-13, 2012, Melbourne, Australia.**

Στην εργασία αυτή προτείνεται ένας αλγόριθμος κατασκευής συστήματος αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων οι οποίες ικανοποιούν έναν δεδομένο χώρο ομαλών και κρουστικών λύσεων. Τα αποτελέσματα αυτά επεκτείνουν τα αποτελέσματα που αναφέρονται στο βιβλίο (Gohberg I., Lancaster, P., Rodman, L., 1982) και τα οποία αφορύσαν μόνο τον ομαλό χώρο λύσεων. Παρόλο που στο βιβλίο αυτό γίνεται αναφορά στα decomposable pairs, δεν είχε γίνει καμιά αναφορά στην κρουστική απόκριση συστημάτων και την συσχέτιση που έχουν αυτές με τα decomposable pairs. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος πάντα οδηγεί σε ένα τετράγωνο σύστημα (regular system) με την συγκεκριμένη συμπεριφορά, παρόλο που μπορεί ένα μη τετράγωνο σύστημα πιο ελάχιστου βαθμού να ικανοποιεί την συμπεριφορά αυτή. Η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι διαφορετική από αυτή που αναφέρεται στην εργασία [Α47].

68) **Dimitris N. Varsamis, Paris A. Mastorocostas, Apostolos K. Papakonstantinou and Nicholas P. Karampetakis, 2012, A parallel searching algorithm for the insetting procedure in Matlab Parallel Toolbox, Proceedings of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems.**

Η εργασία αυτή παρουσίαζει την υλοποίηση ενός παράλληλου αλγόριθμου αναζήτησης, ο οποίος χρησιμοποιείται κατά τη διαδικασία ενσωμάτωσης εικόνων στην χαρτογραφία. Η χρονική πολυπλοκότητα της διαδικασίας αυτής είναι αρκετά μεγάλη, λόγω του ότι τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στην χαρτογραφία είναι χάρτες με πάρα πολύ μεγάλη ευκρίνεια. Στόχος λοιπόν της εργασίας είναι να μειώσει όσο το δυνατό τον χρόνο επεξεργασίας, κάνοντας χρήση πολυπύρηνων επεξεργαστών και κοινόχρηστης μνήμης. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος καθώς και τα τέστ απόδοσης αναπτύχθηκαν στο πακέτο παράλληλης επεξεργασίας του Matlab (Matlab Parallel Toolbox).

69) **Varsamis, Dimitris and Nicholas P. Karampetakis, 2012, On a Special Case of the two-variable Newton Interpolation Polynomial, 2nd International Conference on Communications, Computing and Control Applications (CCCA’12), December 6-8, 2012, Marseilles, France.**

Η εργασία αυτή μελετάει την ειδική περίπτωση, της μεθόδου παρεμβολής Newton για συνάρτησεις δύο μεταβλητών, κατά την οποία τα σημεία παρεμβολής είναι ισαπέχοντα και ανήκουν πάνω σε ορθογώνια βάση. Για την περίπτωση αυτή ο αλγόριθμος παρεμβολής Newton παρουσιάζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους, με τον δεύτερο να ανάγεται σε γινόμενο πίνάκων. Η πολυπλοκότητα των δύο προτεινόμενων αλγορίθμων αποδεικνύεται ότι είναι καλύτερη από αυτή που παρουσιάστηκε στην εργασία [Α46], επειδή βασίζεται μόνο σε προσθέσεις. Ο δεύτερος αλγόριθμος μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα σε προγραμματιστικά περιβάλλοντα που υποστηρίζουν πράξεις πινάκων όπως το Matlab, ενώ η πολυπλοκότητα του μπορεί να μειωθεί ακόμα περισσότερο με την χρήση παράλληλης επεξεργασίας.

70) **Gregoriadou Anastasia and Nicholas P. Karampetakis , 2012, Reachability and Controllability of Discrete Time Descriptor Systems, 2nd International Conference on Communications, Computing and Control Applications (CCCA’12), December 6-8, 2012, Marseilles, France.**

Στην εργασία αυτή ορίζονται το αιτιατό (causal) και μη αιτιατό (non-causal) Gammian, τα οποία χρησιμοποιούνται στον ορισμό του χώρου εφικτότητας ενός διακριτού ιδιόμορφου συστήματος (του χώρου των εφικτών καταστάσεων από μηδενικό αρχικό διάνυσμα κατάστασης). Αντικείμενο μελέτης της εργασίας αυτής είναι και η έννοια της ελεγξιμότητας για διακριτά ιδιόμορφα συστήματα. Προτείνονται τέλος κριτήρια ελεγξιμότητας και εφικτότητας. Η βελτιωμένη έκδοση της εργασίας παρουσιάστηκε στην εργασία [Α48].

71) **Nicholas P. Karampetakis and Karamichalis Rallis, 2013, Discretization of Singular Systems and Error Estimation, 2013 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'2013), May 6, 2013 - May 8, 2013, Hammamet, Tunisia.**

Αποτελεί μια πρώτη μορφή της εργασίας [A50].

72) **A.I.G. Vardulakis, N. Karampetakis, E. Antoniou, and S. Vologiannidis, 2013, Notions of equivalence for linear multivariable systems, Proc. of the 21rst Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'13), June 2013, Chania, Crete, Greece.**

Η εργασία αυτή αποτελεί μια ανασκόπηση πάνω στα είδη ισοδυναμίας μεταξύ γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων, που αναπτύχθηκαν τα τελευταία χρόνια. Όλα αυτά τα είδη ισοδυναμιών ξεκίνησαν αρχικά ως ισοδυναμίες πολυωνυμικών πινάκων που είχαν ως στόχο την διατήρηση αναλλοίωτων που είχαν σχέση με την δομή των πινάκων. Η πολυωνυμική περιγραφή των συστημάτων, και η άρρηκτη σχέση βασικών ιδιοτήτων του συστήματος με την δομή των πολυωνυμικών πινάκων που περιγράφουν το σύστημα, ώθησε την επιστημονική κοινότητα στην εύρεση ισοδυναμιών μεταξύ των πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων που θα διατηρούν αναλλοίωτα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Στην εργασία αυτή προσπαθούμε να παρουσιάσουμε αυτή την ιστορική εξέλιξη καθώς και τους ανθρώπους που συνέλαβαν με τις εργασίες τους στην ανάπτυξη όλων αυτών των εργαλείων που διαθέτουμε σήμερα.

Δ. Ανακοινώσεις με Δημοσίευση Περίληψης σε Έγκριτα Διεθνή Επιστημονικά Συνέδρια

1) **Ziogou C., Voutetakis S., Papadopoulou S., Seferlis P. and N. Karampetakis, "Maximum Power Targeting for the PEM Fuel Cell using an NMPC Framework", presented in a Poster Session of the International Workshop on Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control, NMPC'08, Pavia, Italy, 2008 (Poster).**

Ε. Συμμετοχή σε ημερίδες

1. **Ν. Π. Καραμπετάκης, 2007, Από την Άλγεβρα των Υπολογισμών στα Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας, 1η Μαθηματική Εβδομάδα, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 5-9 Μαρτίου 2007, Porto Palace Hotel, Θεσσαλονίκη.**

   Μια νέα ερευνητική περιοχή που αναπτύχθηκε ιδιαίτερα τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες και η οποία είναι αφιερωμένη : α) σε μεθόδους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων μέσω συμβολικών αλγορίθμων, και β) στην υλοποίηση των αλγορίθμων αυτών σε υλικό και λογισμικό ηλεκτρονικών υπολογιστών, είναι η Υπολογιστική Άλγεβρα (Computer Algebra). Η Υπολογιστική Άλγεβρα έχει εφαρμογές σε επιστήμες όπως Μαθηματικά, Φυσική, Επιστήμη των Υπολογιστών, Μηχανική καθώς και στην Εκπαίδευση. Τα προγράμματα τα οποία κάνουν χρήση των μεθόδων της Υπολογιστικής Άλγεβρας, ονομάζονται Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας (Computer Algebra Systems). Στην εργασία αυτή γίνεται αναφορά: στην ιστορική εξέλιξη των συστημάτων αυτών και στους παράγοντες που συνετέλεσαν στην ανάπτυξη τους, στις κατηγορίες που χωρίζονται τα συστήματα αυτά, στα κύρια χαρακτηριστικά τους, στα μειονεκτήματα τους καθώς και στον ρόλο που μπορούν να παίξουν στην εκπαίδευση.

2. Ν. Π. Καραμπετάκης, 2008, Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου, 2η Μαθηματική Εβδομάδα, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 3-7 Μαρτίου 2008, Porto Palace Hotel, Θεσσαλονίκη.

Η ιστορία της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου έχει τις ρίζες της, στην ανάπτυξη ενός σημαντικού κλάδου των Μαθηματικών, του Λογισμού των Μεταβολών. Στην εργασία αυτή γίνεται αναφορά στο ιστορικό της γέννησης του σημαντικού αυτού κλάδου των Μαθηματικών, ενώ στην συνέχεια αναφέρεται ο βασικός στόχος της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου.

ΣΤ. Διδακτικές σημειώσεις

1) Α. Ι. Βαρδουλάκης και Ν. Π. Καραμπετάκης, 1993, Διδακτικές Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων Ι, Τμήμα Μαθηματικό, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Το παρόν σύγγραμα έχει ως σκοπό να παρουσιάσει α) μια συνοπτική θεωρία όσον αφορά την Κλασσική Θεωρία Ελέγχου και β) ένα μεγάλο πλήθος ασκήσεων καθώς και μεθοδολογίας ασκήσεων που θα βοηθήσουν τον φοιτητή στην αντιμετώπιση πολύπλοκων προβλημάτων της Κλασσικής Θεωρίας Ελέγχου. Ένα πλήθος προγραμμάτων σε Basic προσφέρεται στο τέλος των σημειώσεων με σκοπό την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων της Κλασσικής Θεωρίας Ελέγχου μέσω Η/Υ. Αναφέρουμε συνοπτικά τα αντικείμενα που εξετάζονται :

Σύστημα, Γραμμικά Συστήματα, Απόκριση Συστημάτων (Ελεύθερη-Δυναμική-Ολική, Μόνιμη-Μεταβατική), Μετασχηματισμοί Laplace και συνήθεις συναρτήσεις εισόδου, Αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace, Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές βάσει μετασχηματισμών Laplace, Συνάρτηση Μεταφοράς, Συνδεδεόμενα Συστήματα, Κρουστική απόκριση, Ευστάθεια, Αρμονική απόκριση, Κριτήριο Routh, Θέματα μιγαδικών συναρτήσεων, Κριτήριο Nyquist, Γεωμετρικός τόπος ριζών, Υπολογισμός αντισταθμιστού για επανατοποθέτηση πόλων.

Προγράμματα Η/Υ για την επίλυση των εξής προβλημάτων : Εύρεση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, Κριτήριο Routh, Γεωμετρικός τόπος ριζών.

http://eclass.auth.gr/modules/document/file.php/MATH102/%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97%20%CE%98%CE%95%CE%A9%CE%A1%CE%99%CE%91%20%CE%A3%CE%A5%CE%A3%CE%A4%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%A9%CE%9D%20%CE%99.pdf .

2) Α. Ι. Βαρδουλάκης και Ν. Π. Καραμπετάκης, 1993, Διδακτικές Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων ΙΙ, Τμήμα Μαθηματικό, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Το παρόν σύγγραμα έχει ως σκοπό να παρουσιάσει α) μια συνοπτική θεωρία όσον αφορά την Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου και β) ένα μεγάλο πλήθος ασκήσεων καθώς και μεθοδολογίας ασκήσεων που θα βοηθήσουν τον φοιτητή στην αντιμετώπιση πολύπλοκων προβλημάτων της Μοντέρνας Θεωρίας Ελέγχου. Αναφέρουμε συνοπτικά τα αντικείμενα που εξετάζονται :

Ιδιοτιμές και ιδιοανύσματα, Ο πίνακας e^{At}, Περιγραφή γραμμικών χρονικά αμετάβλητων πολυμεταβλητών συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων, Απόκριση συνεχών και διακριτών συστημάτων (Ελεύθερη-Δυναμική-Ολική), Ελεγξιμότητα, Παρατηρησιμότητα, Ευστάθεια, Ανάδραση καταστάσεως, Ανάδραση εξόδου, Μετάβαση από πολυωνυμική περιγραφή συστημάτων σε περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων, Ισοδύναμες περιγραφές συστημάτων, Διαγράμματα βαθμίδων, Κανονικές μορφές συστημάτων.

http://eclass.auth.gr/modules/document/file.php/MATH102/%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%97%20%CE%98%CE%95%CE%A9%CE%A1%CE%99%CE%91%20%CE%A3%CE%A5%CE%A3%CE%A4%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%A9%CE%9D%20%CE%99%CE%99.pdf

3) Ν. Π. Καραμπετάκης, 1997, Εισαγωγή στο MS-DOS και στην BASIC, ΤΕΙ Καβάλας.

Σκοπός αυτού του συγγράμματος, είναι α) η συνοπτική περιγραφή του ηλεκτρονικού υπολογιστή και β) η περιγραφή ενός αποσπασματικού μέρους εντολών του λειτουργικού συστήματος MS-DOS που μας βοηθάει να επικοινωνούμε με τα διάφορα μέρη του Η/Υ γ) η ανάπτυξη βασικών δεξιοτήτων στον προγραμματισμό στην γλώσσα BASIC.

http://eclass.auth.gr/modules/document/file.php/MATH104/%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CF%84%CE%BF%CF%85%20%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%BF%CF%82/3-DOS-BASIC.pdf

4) Ν. Π. Καραμπετάκης, Δημιουργία κεφαλαίων στο συνοδευτικό εκπαιδευτικό υλικό της Θεματικής Ενότητας ΠΛΗ 12 στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Υλικό για Γραμμική Άλγεβρα, 20/10,2004, (Κεφάλαιο 9. Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα (σελ.58) - Κεφάλαιο 10. Διαγωνιοποίηση (σελ.62)).
http://dspace.eap.gr/dspace/handle/123456789/63

Matlab και Mathematica, 1/8/2004, (Εισαγωγή σε Mathematica (σελ.37) - Εφαρμογές του Mathematica στην Γραμμική Άλγεβρα (σελ.101) - Εφαρμογές του Mathematica στον Λογισμό μιας μεταβλητής (σελ.67))
http://dspace.eap.gr/dspace/handle/123456789/65.

http://edy.eap.gr/jspui/browse?type=author&order=ASC&rpp=20&value=%CE%9A%CE%B1%CF%81%CE%B1%CE%BC%CF%80%CE%B5%CF%84%CE%AC%CE%BA%CE%B7%CF%82%2C+%CE%9D..

5) Δημιουργία ηλεκτρονικού site με σημειώσεις από τα μαθήματα :

- Εισαγωγή στην Fortran 90/95 (προπτυχιακό)
- Συμβολικές γλώσσες προγραμματισμού (προπτυχιακό)
- Μαθηματικά για Πληροφορική Ι (ΠΛΗ12 του ΕΑΠ)
- Ανάλυση και Σύνθεση συστημάτων με την βοήθεια Η/Υ (μεταπτυχιακό)
- Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου (μεταπτυχιακό)

http://eclass.auth.gr/modules/auth/opencourses.php?fc=18

Πέρα από τα παραπάνω site υπάρχει και το site : http://anemos.math.auth.gr/.

Ζ. Βιβλία

Εισαγωγή στην Fortran 90/95/2003

Νικόλαος Καραμπετάκης

Ζήτη, 2011
592 σελ.
ISBN 978-960-456-280-0
Κωδ. Εύδοξος : 12550424

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κυρίως σε πρωτοετείς προπτυχιακούς φοιτητές των Σχολών Θετικών Επιστημών, των Πολυτεχνικών Σχολών και των Σχολών Τεχνολογικών Εφαρμογών που θέλουν να εντρυφήσουν στις βασικές δομές προγραμματισμού μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Fortran 90 και στοιχείων της Fortran 95/2003.

Στη νέα αυτή έκδοση του βιβλίου γίνεται μια εισαγωγή στην πολυπλοκότητα των Αλγορίθμων καθώς και σε βασικές έννοιες της Αριθμητικής Ανάλυσης, δίνοντας με τον τρόπο αυτόν ερεθίσματα στον αναγνώστη για περαιτέρω μελέτη στα γνωστικά αυτά αντικείμενα.

Έχει προστεθεί ένα νέο κεφάλαιο που αναφέρεται στους δείκτες και στην χρήση τους για την δημιουργία δυναμικών δομών δεδομένων ενώ παράλληλα έχει εμπλουτισθεί με πολλά επιπλέον παραδείγματα και άλυτες ασκήσεις.

Την ακαδημαϊκή χρονιά 2012-2013 το βιβλίο έχει προταθεί ως σύγγραμμα σε 16 τμήματα Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι..

Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων

Νικόλαος Καραμπετάκης

Ζήτη, 2009
327 σελ.
ISBN 978-960-456-140-7
Κωδ. Εύδοξος : 11128

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κυρίως σε τελειόφοιτους προπτυχιακούς φοιτητές και μεταπτυχιακούς φοιτητές των Σχολών Θετικών Επιστημών, των Πολυτεχνικών Σχολών καθώς και των Σχολών Τεχνολογικών Εφαρμογών που θέλουν να εντρυφήσουν σε θέματα Λογισμού Μεταβολών και Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για ανεξάρτητη μελέτη από εφαρμοσμένους μαθηματικούς και μηχανικούς.

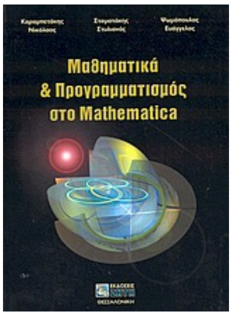
Στο βιβλίο αυτό επιχειρείται η γεφύρωση δύο πολύ σημαντικών τομέων: του Λογισμού των Μεταβολών και του Βέλτιστου Ελέγχου που αποτελεί μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του Λογισμού των Μεταβολών. Για τον λόγο αυτό έγινε ο διαχωρισμός του βιβλίου σε δύο ενότητες:

Στην πρώτη ενότητα γίνεται μια εισαγωγική προσέγγιση στην θεωρία του Λογισμού των Μεταβολών, ξεκινώντας με βασικές έννοιες όπως αυτή του συναρτησιακού μιας ή και περισσοτέρων συναρτήσεων και στη συνέχεια διατυπώνοντας αναγκαίες και ικανές συνθήκες ύπαρξης ακρότατων σε συναρτησιακά (συνθήκες Euler-Lagrange, συνθήκες Legendre-Jacobi). Επιμέρους προβλήματα που επιλύονται είναι: η εύρεση ακρότατου μέσω των μερικών διαφορικών εξισώσεων Hamilton-Jacobi, η διατύπωση των συνθηκών Weierstrass-Erdmann για προβλήματα με συναρτήσεις που έχουν ασυνέχεια στις παραγώγους, η ελαχιστοποίηση συναρτησιακών με συναρτήσεις που υπόκεινται σε περιορισμούς, το ισοπεριμετρικό πρόβλημα.

Η δεύτερη ενότητα αναφέρεται πάνω στις εφαρμογές της θεωρίας του Λογισμού των Μεταβολών στον Βέλτιστο Έλεγχο. Επιλύεται το πρόβλημα Bolza μέσω του Λογισμού των Μεταβολών αλλά και του Δυναμικού Προγραμματισμού. Τα αποτελέσματα αυτά εφαρμόζονται στην επίλυση του γραμμικού τετραγωνικού προβλήματος καθώς και στο πρόβλημα ανίχνευσης. Διατυπώνεται η αρχή ελαχίστου του Pontryagin και εφαρμόζεται στα προβλήματα : ελάχιστου χρόνου, ελάχιστων καυσίμων, ελάχιστης ενέργειας, βέλτιστου ελέγχου με περιορισμούς στα διανύσματα κατάστασης.

Στο παράρτημα του βιβλίου γίνεται αναφορά σε βασικές έννοιες των Μαθηματικών και της Θεωρίας Ελέγχου. Το βιβλίο συνοδεύεται από ένα μεγάλο πλήθος λυμένων αλλά και άλυτων παραδειγμάτων τα οποία κάνουν το βιβλίο ιδανικό για ανεξάρτητη μελέτη όπως και για ασκήσεις στην τάξη. Ένα μέρος των παραδειγμάτων λύνεται με χρήση καθαρά μαθηματικών εργαλείων προκειμένου ο αναγνώστης να κάνει μια επανάληψη σε βασικά μαθηματικά εργαλεία που χρειάζεται ενώ ένα άλλο μέρος των παραδειγμάτων λύνεται με την χρήση συναρτήσεων από γνωστά πακέτα προγραμμάτων όπως Mathematica, Matlab, Excel για να δει ο αναγνώστης τις δυνατότητες που του δίνει η τεχνολογία για την επίλυση των προβλημάτων αυτών μιας και η επίλυση τους γίνεται εξαιρετικά δύσκολη σε πραγματικά προβλήματα.

Την ακαδημαϊκή χρονιά 2012-2013 το βιβλίο έχει προταθεί ως σύγγραμμα σε 4 τμήματα Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι..



Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica

Νικόλαος Καραμπετάκης, Σταματάκης Στυλιανός, Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Ζήτη, 2004
486 σελ.
ISBN 960-431-897-7, ISBN-13 978-960-431-897-1
Κωδ. Εύδοξος : 11091

Μέσα από τα εκατοντάδες παραδείγματα και ασκήσεις του βιβλίου "Μαθηματικά και προγραμματισμός στο Mathematica", ο αναγνώστης αφενός εξοικειώνεται με το διαδραστικό περιβάλλον και τις σπουδαιότερες από τις 2000 εντολές του δημοφιλέστερου πακέτου υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας γενικού σκοπού, του Mathematica, και μυείται στις διάφορες μεθόδους προγραμματισμού - διαδικασιακού, συναρτησιακού και κανονοκεντρικού - που υποστηρίζει το Mathematica.

Το βιβλίο απευθύνεται σε φοιτητές τμημάτων μαθηματικών, φυσικής και πολυτεχνείων, που κάνουν τα πρώτα τους βήματα στα μαθηματικά, αλλά και σε μαθηματικούς, φυσικούς και μηχανικούς που έχουν αυξημένες εμπειρίες στα μαθηματικά και επιθυμούν να τα δουν από μια διαφορετική οπτική γωνία.

Την ακαδημαϊκή χρονιά 2012-2013 το βιβλίο έχει προταθεί ως σύγγραμμα σε 6 τμήματα Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι..

Εισαγωγή στην Fortran 90/95

Νικόλαος Καραμπετάκης

Ζήτη, 2002
381 σελ.
ISBN 960-431-817-9, ISBN-13 978-960-431-817-9

Το παρόν σύγγραμμα έχει ως σκοπό να παρουσιάσει βασικές έννοιες προγραμματισμού στη γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90/95.

Δεν κυκλοφορεί πλέον λόγω της 2ης ανανεωμένης έκδοσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (I)., *J.Australian Math. Soc*., Ser.B, 27, 194-222.

[A2] Antoniou, G. E., Glentis, G. O. A., Varoufakis, S. J., & Karras, D. A., 1989, Transfer function determination of singular systems using the DFT. IEEE Transaction on Circuits and Systems, 36(8), 1140–1142.

[A3] Antoniou, E. G., 2001, Transfer function computation for generalized N-dimensional systems. Journal of the Franklin Institute, 338, 83–90.

[A4] Antoniou, E. N. and S. Vologiannidis, 2004, A new family of companion forms of polynomial matrices, Electron. J. Linear Algebra, Vol. 11, pp. 78–87.

[A5] Antoniou, E. N. and S. Vologiannidis, 2006, Linearizations of polynomial matrices with symmetries and their applications, Electron. J. Linear Algebra, Vol. 15, pp. 107–114.

[A6] Antsaklis P.J. and Michel A.N., 2006, Linear Systems, Birkhauser, Boston, 2nd Corrected Printing.

[A7] Attasi S., 1975, Modelisation of traitment des suites a deux indices, *IRIA Rap. Laboria*.

[B1] Blomberg H. and Ylinen R., 1983, *Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems.,* Mathematics in Science and Engineering, Vol.166, Academic Press, London.

[B2] D.J. Bender, 1987, Lyapunov Like Equations and Reachability Observability Grammians for Descriptor Systems, IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-32, No.4, pp.343-348.

[B3] Borgmann M., & Bolcskei H., 2004, Interpolation-based efficient matrix inversion for MIMO-OFDM receivers, Vol 2 (pp. 1941–1947). Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers 2004.

[B4] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations in generalized state-space form for polynomial system matrices, and the definition of poles, zeros and decoupling zeros at infinity., *Int.J.Control*, 33, 393-411.Springer-Verlag, New York.

[B5] Brull T., 2009, Explicit solutions of regular linear discrete-time descriptor systems with constant coefficients, Electron. J. Linear Algebra, Volume 18, pp. 317-338.

[C1] S.L. Campbell, 1980, Singular Systems of Differential Equations, Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program.

[C2] Cullen D.J., 1987, Underlying algebraic framework of equivalence relations on linear systems., *Int.J.Control*, 45, 1415-1425.

[D1] L. Dai, 1989, Singular Control Systems, Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus, NJ, USA.

[D2] DeClaris N. and A.Rindos, 1984, Semistate analysis of neural networks in Apysia California., *Proc. 27th MSCS*, Morgantown, WV, 686-689.

[D3] Decell H.P., 1965, An application of the Cayley Hamilton theorem to generalized matrix inversion., *SIAM Review*, 7, 526-528.

[F1] Fiedler, M., 2003, A note on companion matrices, Linear Algebra Appl., Vol. 372, pp. 325–331.

[F2] Fornasini E. and Marchesini G, 1976, State-space realization theory of two-dimensional filters, *IEEE Trans. Auto. Control*, 53, pp.431-433.

[F3] Fornasini E. and Marchesini G, 1978, Doubly indexed dynamical systems : State space models and structural properties, *Math. Syst. Theory*, 12, No.1.

[F4] Fragulis G., Mertzios B.G. and Vardulakis A.I., 1991, Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion., *Int.J.Control*, 53, 431-443.

[G1] Gantmacher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*. New York : Chelsea.

[G2] Gohberg I., Langaster P and Rodman I., 1982, *Matrix Polynomials*., Academic Press, New York.

[G3] Grevile T.N.E., 1993, The Souriau-Frame algorithm and the Drazin pseudoinverse, Linear Algebra and its Applications, 6, 205-208.

[H1] Hayton G.E., Fretwell P. and Pugh A.C., 1986, Fundamental equivalence of generalized state-space systems. , *IEEE Trans.Auto. Control*, Vol.AC-31, No.5, pp.431-439.

[H2] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications., *Int.J.Control*, 47, 53-64.

[H3] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1990, Infinite frequency structure preserving transformations for general polynomial system matrices., *Int. J. Control*, 52, No.1, pp.1-14.

[J1] Jun Ji, 1994, An alternative limit expression of the Drazin inverse and its applications, *Appl. Math. Comput*., 61, 151-156.

[K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[K2] Karageorgos A., Pantelous A. and Kalogeropoulos G., 2010, Discretizing lti descriptor (regular) differential input systems with consistent initial conditions. Advances in Decision Sciences.
[K3] Karcanias N., 1975, *Geometric theory of zeros and its use in feedback analysis*., Ph.D. Thesis, University of Manchester, Elec. Eng. Dept., U.K., pp.245-247.
[K4] Kaczorek, T., 1985, Two-dimensional linear systems. Lecture notes in control and information sciences. Springer-Verlag New York.
[K5] Kaczorek T., 1988, Singular general model of 2-D systems and its solutions.
[K6] T. Kaczorek, 2002, Positive 1-D and 2-D systems, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag.
[K7] Komornik J, Rocha P. and Willems J.C., 1989, Closed subspaces, polynomial operators in the shift, and ARMA representations.
[K8] Kronecker L., 1890, Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen., S.-B. Akad., Berlin 763-76.
[K9] Kucera, V., 1979, Discrete linear control: The polynomial approach. New York: Wiley.
[K10] Kurek J, 1985, The generalized state space model for a two-dimensional linear digital system., *IEEE Trans. Auto. Control*, 30, 600-602.
[L1] Leontieff W.W., 1953, *Static and dynamic theory, in : Studies in the Structure of the American Economy*. (ed. : W.W. Leontieff), Oxford University Press, New York.
[L2] Levy B, Kung S-Y, Morf M. and Kailath T., 1977, A unification of system equivalence definitions., *Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, pp.795-800.
[L3] F.L. Lewis, 1985, Fundamental, reachability and observability matrices for discrete descriptor systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.30, Issue 5, 502-505.
[L4] Lewis F.L., 1986, A survey of linear singular systems., *Circuit Systems & Signal Process,* 5.
[L5] F.L. Lewis, B.G. Mertzios, 1990, On the analysis of discrete linear time-invariant singular systems, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 35, Issue 4, 506-511.
[L6] Lewis F.L. and Mertzios B.G., 1992, On the analysis of two dimensional discrete singular systems., *Circuit Systems & Signal Process*, 11, 399-419.
[L7] Lobo, R., Bitzer, D. L., & Vouk, M. A., 2006, Locally invertible multivariate polynomial matrices. Coding and Cryptography, Lecture Notes in Computer Science, 3969, 427–441.
[L8] Luenberger D.G., 1978, Time invariant descriptor systems., *Automatica*, 14, 473-480.
[M1] MacFarlane A.G.J. and Karcanias N., 1976, Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory., *Int.J.Control*, 24, pp.33-74.
[M2] Mertzios B.G., 1984, Leverrier's algorithm for singular systems., *IEEE Trans. Automatic Control*, 29, 652-653 ; 1986, An algorithm for the computation of the transfer function matrix of two dimensional systems. *Journal of Franklin Institute*, 32, 74-80.
[M3] Mertzios B.G. and Lewis F.L., 1988, An algorithm for the computation of the transfer function matrix of generalised two-dimensional systems. *Circuit Systems & Signal Process*, 7, 459-466.
[M4] Mertzios B.G. and Paraskevopoulos P.N., 1981, Transfer function matrix of 2-D systems., *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 722-724.
[M5] Morf M., 1975, Extended system matrices - transfer functions and system equivalence., *Proceedings of the 1975 IEEE Conference on Decision and Control*, Houston, pp.199-206.
[N1] Neidinger R. D., Multivariable Interpolating Polynomials in Newton Forms, Joint Mathematics Meetings 2009, Washington D.C., January 5-8, 2009.
[N2] Newcomb R., 1981, The semistate description of nonlinear time -variable circuits, *IEEE Trans. on Auto. Control*, Vol.28, No.1, pp.62-71.
[P1] Paccagnella, L. E., & Pierobon, G. L., 1976, FFT calculation of a determinantal polynomial. IEEE Transaction on Automatic Control, 29(3), 401–402.
[P2] Penrose R., 1955, A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51, pp.406-413.
[P3] Pernebo L., 1977, Notes on strict system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.25, No.1, pp.21-38.
[P4] Pernebo L., 1981, An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems. - Part I : Structure Matrices and Feedforward design., *IEEE Trans. Auto. Control,* AC-26, 171-182.
[P5] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.27, NO.5, 657-672.
[P6] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, 27, 657-672.
[P7] Pugh A.C., Hayton G.E and Fretwell P., 1987, On transformations of matrix pencils and implications in Linear System Theory., *Int.J.Control* ,45 ,529-548.

[P8] Pugh A.C., D.S.Johnson and Hayton G.E., 1992, On conditions guaranteeing two polynomial matrices possess identical zero structures., *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37, 1383-1386.

[P9] Pugh A.C., Antoniou E., Karampetakis N.P. and Hayton G.E., 1998, Fundamental equivalence on nonregular AR-representations., submitted for possible publication to *Automatica*.

[R1] Rocha P., 1990, *Structure and representations of 2-D systems*, Ph. D. Thesis, Univeristy of Groningen, The Netherlands.

[R2] Roesser R.P., 1975, A discrete state-space model for linear image processing, *IEEE Trans. Auto. Control,* 20 : 1-10.

[R3] Rosenbrock H.H., 1970, *State Space and Multivariable Theory*., Nelson, London.

[R4] Rosenbrock H.H. and Pugh A.C., 1974, Contributions to a hierarchical theory of systems., *Int.J.Control*, 19, 845-867.

[R5] Rosenbrock H.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1977, Inverse systems., *Int.J.Control*, 25, pp.389-392.

[S1] Schuster, A., & Hippe, P., 1992, Inversion of polynomial matrices by interpolation. IEEE Transactions on Automatic Control, 37, 363–365.

[S2] Smith M.C., 1981, Matrix fractions and strict system equivalence, *Int.J.Control*, 34, 869-883.

[S3] Stykel T., 2002, Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations. Ph.D. thesis, Institut fr Mathematik, Technische Universitt Berlin.

[T1] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1988, A singular system realization for arbitrary matrix fraction descriptions., *ISCAS'88*, 615-618.

[V1] Vardulakis A.I.G. and Fragulis G., 1989, Infinite elementary divisors of polynomial matrices and impulsive solutions of linear homogeneous matrix differential equations., *Circuit Systems and Signal Process,* 8, pp.357-373.

[V2] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods,* Wiley, Chichester.

[V3] Vardulakis A.I.G., 1991, On the transformation of a polynomial matrix model of a linear multivariable system to generalized state space form., Proceedings of the 30th *IEEE Conference on Decision and Control Transactions on Automatic Control*, December 11-13, 1991, Brighton, England.

[V4] Vardulakis A.I.G. and Antoniou E., 2001, Fundamental equivalence of discrete time AR-representations, Proceedings of the *1rst IFAC Symposium on System Structure and Control.*

[V5] Verghese G.C., 1978, *Infinite-Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems.,* Ph.D.Thesis, Stanford University.

[V6] Verghese G. and Kailath T., 1979, Impulsive behaviour in dynamical systems : Structure and significance., Proc. 4th Int.Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems, Delft, The Netherlands, Vol.3, P.Dewilde, Ed. ; North Hollywoord, Ca., Western Periodicals Co., pp.162-168.

[V7] Vidyasagar, M., 1985, Control systems synthesis: A factorization approach. Cambridge, MA: M.I.T.

[W1] Walker B.W., 1988, *Equivalence Transformations for Linear Systems*., Ph.D.Thesis, Hull University.

[W2] Willems J.C., 1991, Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems., *IEEE Trans.Auto.Control*, 36, pp.259-294.

[W3] Wolovich W.A., 1973, Determination of state-space representations for linear multivariable systems., *Automatica*, 9, 97-106.

[W4] Wolovich W.A., 1974, *Linear Multivariable Systems*., Springer-Verlag, New York.

[W5] Wolovich W.A. and Guidorzi R., 1977, A general algorithm for determining state-space representations., *Automatica*, 13, 295-299.

[Y1] Yip E. and Sincovec R.F., 1981, Solvability, controllability and observabilityof continuous descriptor systems, *IEEE Trans. On Auto. Control*, Vol.26, pp.702-707.

[Z1] Zhang Shou-Yuan, 1989, Generalized proper inverse of polynomial matrices and the existence of infinite decoupling zeros., *IEEE Trans.on Auto.Control*, 34, 743-745.

[Z2] Zhang S-Y, 1989, Polynomial matrix linearization and strongly irreducible realization for singular systems., *Int.J.Control*, 49, 471-479.